Tallyta Carolyne Martins da Silva[1], Valdivino Vargas Júnior [2]

Universidade Federal de Goiás, CEP 74001-970, Brasil.

tallytacarol@yahoo.com.br e vvjunior@mat.ufg.br

Cadeias de Markov: Conceitos e Aplicações em Modelos de Difusão de Informação

Resumo

Cadeias de Markov são processos estocásticos com a chamada propriedade markoviana. Estes processos têm aplicabilidade desde a biologia até a economia. Neste texto será apresentado conceitos básicos de Cadeias de Markov, concentrando nas cadeias a tempo discreto. Citaremos alguns dos processos estocásticos markovianos mais comuns na literatura: passeios aleatórios e processos de ramificação. Vamos exibir uma aplicação das Cadeias de Markov em modelo para a difusão de vírus em uma rede de computadores.

PALAVRAS-CHAVE: Cadeias de Markov, Passeio Aleatório, Recorrência.

1 INTRODUÇÃO

Uma Cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico que possui a chamada propriedade markoviana . Um processo estocástico tem a propriedade markoviana se os estados anteriores do processo são irrelevantes para a predição dos próximos estados , desde que o estado atual seja conhecido. O matemático Andrey Markov em 1906 conseguiu os primeiros resultados para estes processos. Atualmente, Cadeias de Markov tem sido estudadas e utilizadas em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, ciências biológicas, sociais e administrativas . Probabilidades ligadas a jogos, evolução de populações e resultados sobre teoria de filas são algumas aplicações. Também encontra-se aplicações de Cadeias de Markov em modelos epidêmicos, processos de migração, estudos

[1]Orientanda Bolsista PIVIC

[2]Orientador.

Revisado pelo Orientador

sobre o DNA, modelos de gerenciamento de recursos, modelos para processos de decisão, modelo para difusão de informação, dentre outros.

2 OBJETIVOS

Apresentar os conceitos básicos de Cadeias de Markov, focando nas cadeias a tempo discreto. Analisar os seguintes conteúdos no desenvolvimento do texto: Análise Combinatória, Probabilidade, Teoria básica de grafos e Processos Estocásticos.

Examinar alguns dos processos estocásticos markovianos mais citados na literatura: passeio aleatório, processo de ramificação e processo de nascimento e morte. Considerar uma aplicação particular das Cadeias de Markov em modelos para a difusão de informação por agentes móveis.

3 CADEIAS DE MARKOV

Processo de Markov é um tipo especial de processo estocástico onde as distribuições de probabilidade para o passos futuros do processo dependem somente do estado presente, desconsiderando como o processo chegou a tal estado. Se o espaço de estados é discreto (enumerável), então o modelo de Markov é denominado Cadeia de Markov.

3.1 Conceito de Cadeia de markov

Um processo estocástico é uma coleção de variáveis randômicas indexadas por elementos t pertencente a um determinado intervalo de tempo.

Definição 3.1. *Seja o processo estocástico* $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ *em tempo discreto. As variáveis* X_n *possuem possíveis valores num conjunto E finito ou infinito enumerável E chama-se conjunto de estados ou espaço de estados.* $X_n = i$ *representa que o processo está no estado i no tempo n.* X_n *é cadeia de Markov se*

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0, = i_0) = P(X_{n+1} = j|X_n = i) = p_{ij}.$$

Ou seja, a chance de estar no instante n+1 no estado j depende somente do estado no instante n, mas independe de toda a história do processo (estados $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$*). Esta* *propriedade chama-se propriedade markoviana. As probabilidades podem ser representadas através de matriz de transição:*

$$\begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ p_{i,0} & p_{i,1} & p_{1,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

3.2 Equações de Kolmogorov

As equações de Kolmogorov - Chapman fornecem o cálculo de probabilidades de transição em n passos. Estas equações mostram que as probabilidades de transição de n etapas podem ser obtidas, recursivamente, a partir das probabilidades de transição de uma etapa.

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(m)} \text{ para todos n,m} \geq 0, \text{ e todos i,j.}$$

3.3 Classificação dos estados de uma Cadeia de markov

Nesta seção vamos estudar os tipos de estados de uma cadeia de Markov.

Definição 3.2. *(Estado acessível)*

Um estado j é acessível do estado i, se existe n$\geq$ 0 tal que $P_{i,j}^{n}$ >0. Em outras palavras, se for possível chegar ao estado j saindo do estado i, então j é acessível a partir de i. Mas

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, \textit{ se i=j} \\ 0, \textit{ caso contrário} \end{cases}$$

Desse modo, qualquer estado i é acessível dele mesmo.

Definição 3.3. *(Estados comunicáveis)*

Dizemos que dois estados se comunicam se cada um for acessível a partir do outro. A relação de comunicação no espaço de estados é uma relação de equivalência pois satisfaz as seguintes condições:

i) (Reflexiva) Todo estado i se comunica com ele mesmo: $(i \leftrightarrow i)$*, pois* $P^0_{i,i} = 1$.

ii) (Simétrica) Se o estado i se comunica com o estado j, o estado j se comunica com o estado i: $(i \leftrightarrow j) \Rightarrow (j \leftrightarrow i)$.

iii) (Transitiva) Se o estado i se comunica com o estado j, e o estado j comunica com o estado k, então o estado i comunica com o estado k: $(i \leftrightarrow j)$, $(j \leftrightarrow k) \Rightarrow (i \leftrightarrow k)$.

Definição 3.4. *(Estado não essencial)*

Um estado $i \in E$ é não essencial se existe um instante $n \in N$ e $j \in E$ tais que $P^n_{i,j}$ *>0 e* $P^m_{j,i}$ *=0 para todo $m \in N$. Caso contrário, temos um estado essencial.*

Definição 3.5. *(Estado recorrente)*

Considerando fi como a probabilidade de que iniciando no estado i a cadeia de Markov X_n *retorne a este estado:* f_i *= P(existe n> 0 tal que* X_n*= i |* $X_0 = i$*)*

Se f_i *= 1 o estado é recorrente, já se* f_i *< 1 o estado é transiente.*

Proposição 3.6. *O estado i é recorrente se* $\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{i,i} = \infty$ *e é transiente se* $\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{i,i} < \infty$.

Definição 3.7. *(Estado absorvente)*

Um estado i é absorvente se uma vez adentrado, a cadeia jamais o deixa.

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, \textit{se } j = i \\ 0, \ \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Proposição 3.8. *Todo estado absorvente é recorrente.*

Corolário 3.9. *Todo estado absorvente pertence a uma classe exclusiva. $C = \{i\} \Longleftrightarrow$ i é absorvente.*

Definição 3.10. *Um conjunto de estados de uma cadeia de Markov forma uma classe C, se quaisquer dois estados desse conjunto se comuniquem, e quaisquer dois estados comunicáveis pertencem a mesma classe. Logo, se há duas classes para uma Cadeia de Markov, então elas são disjuntas* ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) *ou idênticas* ($C_1 \equiv C_2$).

Definição 3.11. *Cadeia de Markov* X_n *irredutível é uma cadeia em que todos os estados formam apenas uma classe.*

Exemplo 3.12. *Sejam 0,1,2 estados de uma Cadeia de Markov com a matriz de transições*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Analisando a matriz de transição inferimos que $0 \leftrightarrow 1$ *e* $1 \leftrightarrow 2$. *E por meio da propriedade de estados comunicáveis obtemos que* $0 \leftrightarrow 2$ *também. Claramente temos uma Cadeia de Markov irredutível pois todos os estados são comunicáveis .*

4 Probabilidades limite

Analisaremos agora a distribuição invariante:

Proposição 4.1. *Para uma Cadeia de Markov satisfazendo as seguintes equações:*

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{i,j} = \pi(j), \textit{para todo } j \in E.$$

Desse modo, são válidas as afirmações: i) Para todo $j \in E$,

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{i,j}^{(2)} = \pi(j).$$

Para $n \geq 1$ *temos que*

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{i,j}^{(n)} = \pi(j).$$

ii) Quando a cadeia tem distribuição inicial π *logo para todo* $n \geq 1$ *, temos que*

$$P(X_n = i) = \pi(i).$$

Proposição 4.2. *A distribuição* π_∞ *será a distribuição assintótica da cadeia* $\{X_n\}_{\{n \geq 0\}}$ *se satisfazer*

$$\lim_{n \to \infty} P_{i,j}^{n} = \pi_\infty \textit{ para todo } j \in E.$$

Proposição 4.3. *Seja* $\{X_n\}_{n \geq 0}$ *uma Cadeia de Markov com matriz de transição P e com distribuição assintótica* π_∞. *Então* π_∞ *é a única distribuição invariante da cadeia.*

Teorema 4.4. `(Teorema básico de convergência)` *Se uma Cadeia de Markov* $\{X_n\}_{n \geq 0}$ *com distribuição invariante* π_{inv} *for irredutível e aperiódica então* π_{inv} *será a sua distribuição assintótica.*

Exemplo 4.5. *Vamos considerar uma Cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a distribuição invariante existe e corresponde a

$$\pi_{inv} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

O limite de P^n *quando* $n \to \infty$ *não existe pois* $P^{2n+1} = P$ *e* $P^{2n} = P^2$*, dessa maneira não existe distribuição assintótica.*

Exemplo 4.6. *Considere uma cadeia de Markov* $\{X_n\}_{\{n\geq 0\}}$ *com espaço de estados* $E = \{0,1\}$ *e matriz de transição*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

onde $0 < a + b < 2$*.*

No caso dessa matriz, a medida invariante é equivalente a distribuição assintótica porque temos uma cadeia irredutível e aperiódica.

Definição 4.7. *Um estado i tem o período d se* $p_{ii}^{(n)} = 0$ *se e somente se n não se divide em d. Um estado aperiódico tem d=1.*

Exemplo 4.8. *Passeio aleatório simples é um exemplo em que todos os estados são periódicos com d=2. Seja* T_i *o tempo de volta no estado i:*

$T_i = \min\{n > 0 : X_n = i\}$, $X_0 = i$

Definição 4.9. *Se o estado i é recorrente, então ele chama-se recorrente positivo,se E(*T_i*)*$< \infty$*. Um estado é dito ergódico se for aperíodico e recorrente positivo.*

Teorema 4.10. *Para qualquer Cadeia de Markov ergódica (todos os estados dela são ergódicos) o limite* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ *existe e não depende do i.*

Seja

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, j \geq 0$$

Então o vetor $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots)$ *é solução única do sistema seguinte*

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, j \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1. \end{cases}$$

5 Passeios aleatórios

Definição 5.1. *Sejam* $X_1, X_2, \cdots$ *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas sendo que*

$$P(X_i = 1) = p \quad e \quad P(X_i = -1) = 1 - p = q.$$

Temos um passeio aleatório simples. E se $p = q$ *temos um passeio aleatório simples simétrico.*

Exemplo 5.2. *(Passeio aleatório não homogêneo) Defina* $(X_n,\ n \geq 1)$ *como uma coleção de variáveis aleatórias independentes tais que* $P(X_{n+1} = 1) = \lambda_n$ *e* $P(X_{n+1} = -1) = \mu_n$ *onde* $\lambda_n + \mu_n = 1$.

Desse modo, temos um passeio aleatório não homogêneo no qual as probabilidades de transições dependem de n.

Definição 5.3. ***Tempo de Primeira Passagem***

O tempo da primeira passagem é o número de transições que o processo dá para ir de i *para* k. *Considere um passeio aleatório no qual* $S_0 = i$. *O tempo de primeira passagem é dado por*

$$T_{i,k} = \min\{n > 0 : S_n = k\}.$$

Quando $i = k$, *a variável aleatória* $T_{k,k}$ *é chamada tempo de recorrência de* k.

O tempo de primeira passagem de passeios aleatórios simples possui uma propriedade importante: os passos depois da primeira passagem em k é independente das passagens anteriores. Assim,

$$T_{0,2} = T_{0,1} + T_{1,2}$$

sendo que $T_{0,1}$ *e* $T_{1,2}$ *são independentes e possuem a mesma distribuição já que as* X_i *são identicamente distribuídas.*

Definição 5.4. *(Range)*

O range R_n *do passeio é a quantidade de valores distintos em* $(S_0, S_1, \cdots, S_n)$.

Definição 5.5. *(Tempo de parada)*

Sejam $X_1, X_2, \cdots$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Uma variável aleatória N é definida tempo de parada para esta sequência se o evento* $\{N=n\}$ *é independente de* $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ *para todo n=1,2,*$\cdots$

Teorema 5.6. ***Equação de Wald***

Se X_i $i \geq 1$ *são v.a.i.i.d. tal que E[*X_i*]*$< \infty$ *e se N é um tempo de parada para* $X_1, X_2, \cdots$ *com E[N]*$< \infty$*, então*

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

Exemplo 5.7. *Considere um passeio aleatório simples assimétrico com* $p > \frac{1}{2}$*. O número esperado de passos até o passeio atingir a posição k ,* $k > 0$ *é*

$$E[N] = \frac{k}{2p-1}$$

Temos que E[X_1*] = 1* $< \infty$*. Além disso*

$$\sum_{j=1}^{N} X_j = k \Rightarrow E\left[\sum_{j=1}^{N} X_j\right] = k$$

Desse modo, E[X_1*]= 2p - 1.*

Definição 5.8. ***(Recorrência e transiência)*** *Seja (*$S_n, n \geq 0$*)um passeio aleatório. Um estado i é recorrente se*

$P(S_n = i$ *para infinitos n) = 1.*

Por outro lado, o estado i é transiente se

$P(S_n = i$ *para infinitos n)= 0.*

Definição 5.9. *(Número de visitas* V_i *ao estado* i*)*

Temos $V_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n=i\}}$.

Assim o valor esperado do número de visitas é

E(V_i*) = E(* $\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n=i\}}$*)* $= \sum_{n=0}^{\infty} E(1_{\{S_n=i\}}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = i)$.

Proposição 5.10. *Para qualquer passeio aleatório, as próximas afirmações são similares:*

i) f_0 *= P(*$T_0 < \infty$*) = 1.*

ii)$P(S_n = 0$ *infinitas vezes) = 1.*

iii) $\sum_{n=0}^{\infty}$ *P(*$S_n = 0$*)* $= \infty$.

Teorema 5.11. $P(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \; p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}$

Demonstração. Examine uma realização do passeio aleatório de (0,0) para (n, S_n) formada por r passos positivos e s passos negativos. Se S_n= k então r-s = k e r + s = n. Logo r = $\frac{n+k}{2}$ e s = $\frac{n-k}{2}$. A quantidade de realizações é $\binom{n}{r}$ e cada uma tem a mesma probabilidade: $p^r q^s$. Assim

$$P(S_n = k) = \binom{n}{r} p^r q^s.$$

□

5.1 Dualidade em Passeios aleatórios e Princípio da reflexão

Afirmação 5.1. *($X_1, X_2, \cdots, X_n$) tem a mesma distribuição conjunta de ($X_n, X_{n-1}, \cdots, X_1$).Ou seja,*

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_n = k_n) = P(X_n = k_1, X_{n-1} = k_2, \cdots, X_1 = k_n).$$

Proposição 5.12. *(Princípio da reflexão)*

Se x e y são positivos então o número de passeios de (0,x) para (n,y) que tocam o eixo x é igual ao número de passeios de (0,-x) para (n,y).

Teorema 5.13. ***Teorema do Primeiro acerto*** *Seja b> 0. Então num passeio aleatório simples*

$$P(T_{0,b} = n) = \frac{b}{n} P(S_n = b).$$

Demonstração. Defina N_n(0,x) a quantidade de execuções possíveis de (0,0) para (n,x) (quantidade de passeios de comprimento n partindo de 0 e chegando a x). Seja ainda N_n^b (0,x) o número de execuções possíveis de (0,0) para (n,x) que visitam b pelo menos uma vez. Se $T_{0,b}$ = n então X_n=1 e S_{n-1}=b-1. Logo, existem N_{n-1}(0,b-1) passeios de (0,0) para (n-1,b-1) dos quais $N_{n=1}^b$(0, b-1) passam em b no trajeto. Cada uma dessas realizações possui probabilidade $p^{\frac{n+b}{2}} q^{\frac{n-b}{2}}$. Usando o príncipio da reflexão:

$$\begin{aligned}
P(T_{0,b} = n) &= p(N_{n-1}(0, b-1) - N_{n-1}(0, b+1))p^{\frac{n+b}{2}} q^{\frac{n-b}{2}} \\
&= [\binom{n-1}{\frac{n+b}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}}]p^{\frac{n+b}{2}} q^{\frac{n-b}{2}} \\
&= \frac{b}{n} P(S_n = b)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 5.14. *Num passeio aleatório simples simétrico*

$$E[T_{0,1}] = \infty$$

Demonstração.

$$E(T_{0,1}) = \sum_{m=0}^{\infty} P(S_{2m+1} = 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+1}{m+1} 2^{-(2m+1)} = \infty$$

$\square$

Teorema 5.15. *(Teorema de Ballot)*

Considere S_n *um passeio aleatório simples com* $S_0 = 0$*. Temos que*

$$P(\prod_{i=1}^{2n-1} S_i \neq 0 | S_{2n} = 2r) = \frac{r}{n}.$$

Demonstração. Conte o número N_0^{2n-1} (1,2r) de realizações de (1,1) para (2n,2r) que passam pela origem. Queremos refletir o passeio antes de seu primeiro 0 no eixo x, e dessa maneira mostrar que N^0_{2n-1}(1,2r). Como todas as N_{2n}(0,2r) realizações são igualmente prováveis, a probabilidade desejada é

$$\frac{N_{2n-1}(1,2r) - N^0_{2n-1}(1,2r)}{N_{2n}(0,2r)} = \frac{N_{2n-1}(1,2r) - N_{2n-1}(-1,2r)}{N_{2n}(0,2r)} = \frac{r}{n}.$$

$\square$

Exemplo 5.16. *Problema da ruína do jogador*

Um jogador começa a jogar em um cassino com X reais em dinheiro. Suponhamos que ele participe de um jogo que envolva apostas independentes. Em cada aposta ele ganha um real se ocorrer vitória e caso contrário perde um real. A probabilidade de vitória em cada aposta é p e de derrota 1-p = q. Vamos considerar que os recursos do cassino são ilimitados e que ele jogue indefinidamente, parando somente se ficar sem dinheiro. O capital acumulado pelo jogador ao longo das apostas pode ser encarado como um passeio aleatório. No contexto da dinâmica do jogador, a variável aleatória X_i *representa o ganho do jogador na i-ésima jogada. Queremos mostrar que mesmo estando em um"cassino justo", com probabilidade 1, o jogador fica sem dinheiro em algum momento.*

Demonstração. Consideremos $h_i = \mathbf{P}_i$(acertar 0). Então h é a solução minimal não negativa de

$$h_0 = 1$$
$$h_i = \frac{1}{2}h_{i+1} + \frac{1}{2}h_{i-1} \text{ para i=1,2,...}$$

A solução geral dessa relação de recorrência é

$$h_i = A + Bi.$$

Porém, a restrição $0 \leq h_i \leq 1$ indica que B = 0. Assim, $h_i = 0$ para todo i. Desse modo, em algum momento o capital do jogador é 0. □

6 Simulações

Abordaremos agora um exemplo de simulação:

Exemplo 6.1. *Consideremos a Cadeia de Markov com espaço de estados* $E = \{1, 2, 3\}$ *e seguinte matriz de transição:*

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\mid I_1^1 \mid = P_{1,1} = \frac{1}{2} \quad \mid I_2^1 \mid = P_{1,2} = \frac{1}{2} \quad \mid I_3^1 \mid = P_{1,3} = 0$$
$$\mid I_1^2 \mid = P_{2,1} = 0 \quad \mid I_2^2 \mid = P_{2,2} = \frac{3}{4} \quad \mid I^2 3 \mid = P_{2,3} = \frac{1}{4}$$
$$\mid I_1^3 \mid = P_{3,1} = \frac{1}{8} \quad \mid I_2^3 \mid = P_{3,2} = \frac{3}{8} \quad \mid I_3^3 \mid = P_{3,3} = \frac{1}{2}$$

Então podemos fazer a seguinte construção:

$$I_1^1 = [0, \frac{1}{2}) \qquad I_2^1 = [\frac{1}{2}, 1] \qquad I_3^1 = \phi$$
$$I_1^2 = \phi \qquad I_2^2 = [0, \frac{3}{4}) \qquad I_3^2 = [\frac{3}{4}, 1]$$
$$I_1^3 = [0, \frac{1}{8}) \qquad I_2^3 = [\frac{1}{8}, \frac{1}{2}) \qquad I_3^3 = [\frac{1}{2}, 1]$$

A construção dada acima não é a única possível. Podemos escolher os intervalos de modo a satisfazerem os passos descritos. Uma composição possível seria $I^1{}_1 = [\frac{1}{8},\frac{1}{2}) \bigcup [\frac{5}{8},\frac{3}{4})$ e $I^1{}_2 = [0,\frac{1}{8}) \bigcup [\frac{1}{2},\frac{5}{8}) \bigcup [\frac{3}{4},1]$. Determinar qual intervalo ficará aberto ou fechado também não é relevante, pois a medida de um único ponto é zero.

Em seguida, apontamos um estado inicial ou geramos ele de modo aleatório por meio, por exemplo, da medida invariante do processo. Agora o algoritmo age iteradamente da seguinte maneira: estando no estado i vai para a partição i e gerado o número aleatório uniforme no intervalo [0,1] realiza transição para o estado

$$j = \{j : a \in I^i_j\}.$$

7 Processos de ramificação

Um tipo especial de Cadeia de Markov são os processos de ramificação que inicialmente foram estudados por Galton e Watson em 1873 . O estudo envolvia investigar um problema interessante: a extinção de sobrenomes. Os sobrenomes nesse período histórico eram passados de geração para geração sendo que o filho recebia o sobrenome do pai. Estamos interessados em analisar a ocorrência da extinção do nome da família. Atualmente, podemos encontrar aplicações deste estudo em diversas áreas tais como Física, Biologia, Economia e Computação.

Considere o processo estocástico $\{X_n\}$ onde X_n é o tamanho da população de indivíduos do sexo masculino da n-ésima geração de uma família e cada organismo em seu tempo de vida produz um número aleatório Y_i de descendentes do sexo masculino. As variáveis Y_i são independentes com distribuição de probabilidade

$P(Y_i = k) = p_k$, k=0,1,2$\cdots$.

$p_k > 0$ e $\sum_0^\infty p_k = 1$.

Assumimos que todos os descendentes são independentes.

$$P_{i,k} = P(X_{n+1} = k | X_n = i) = P(\sum_{r=1}^{i} Y_r = k)$$

onde $Y_1, \cdots, Y_i$ são as i "famílias da n-ésima geração" dado que $X_n = i$. O espaço de estados é o conjunto dos inteiros não negativos Z^+ .

Propriedades:

Suponha que $X_0 = 1$

i) $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_i$

Y_i representa o número de filhos do i-ésimo indivíduo da geração n-1.

ii) $E[X_n] = \mu^n$, onde μ é o número médio de descendentes por indivíduo .

Demonstração.

$$E[X_n] = E[E[X_n/X_{n-1}]] = \mu E[X_{n-1}] = \mu E[E[X_{n-1}/X_{n-2}]] = \mu E[X_{n-2}] = \mu^n.$$

□

Vejamos a convergência de $E[X_n]$:

Se $\mu < 1$: $E[X_n]$ converge para zero.

Se $\mu = 1$: $E[X_n]$ constante, igual a 1.

Se $\mu > 1$: $E[X_n]$ diverge para infinito.

iii) Seja π a probabilidade de extinção, isto é,
$\pi = P(X_n = 0$ para algum n).

Teorema 7.1. *Suponha que* $P(X_1 = 0) > 0$ *e* $P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) < 1$. *Então*
i) π *é o menor número positivo satisfazendo*
$x = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P(X_1 = j)$
ou seja, o menor número inteiro positivo satisfazendo $x = G_{X_1}(x)$*, onde* G_{X_1} *é a função geradora de probabilidade de* X_1.
ii) π*= 1 se e somente se* $\mu \leq 1$.

8 Aplicações de Cadeias de Markov em modelos para a difusão de informação

A título de exemplo da aplicação de Cadeias de Markov em modelos para a difusão de informação consideramos um sistema simples de passeios aleatórios. O modelo em estudo tem a seguinte dinâmica (veja [MZM]). No tempo zero em cada vértice dos inteiros há N partículas todas inativas, exceto as presentes na origem. Cada partícula ativa escolhe de forma independente saltar para a direita com probabilidade p e para à esquerda com probabilidade $1 - p$, realizando um passeio aleatório sobre os inteiros.Quando uma partícula salta sobre um vértice com partículas inativas, estas são ativadas e cada uma inicia um passeio aleatório independente sobre os inteiros. Uma partícula ativa morre após saltar L vezes sem acordar outras partículas. No contexto de sistemas de passeios aleatórios este modelo é chamado de Processo Uniforme sobre os inteiros.

A motivação desse modelo reside no estudo da disseminação de vírus em redes de computadores. Imagine uma sequência infinita de computadores ligados em rede de modo que cada computador só se comunique com o vizinho à esquerda ou à direita. No tempo zero um único computador é infectado por um vírus o qual escolhe saltar para o computador à esquerda ou à direita infectando-o. Quando um ou mais vírus chegam a um computador, este é infectado por um novo vírus que inicia a mesma dinâmica de saltos. Ao ser infectado cada computador ativa um antivírus que irá matar qualquer vírus que ali saltar futuramente. Neste modelo algumas perguntas surgem: Existe probabilidade de infinitos computadadores serem infectados? O que ocorre se criarmos um vírus forte capaz de sobreviver a um grande número de computadores com antivírus?

Teorema 8.1. *Considere o Processo Uniforme sobre os inteiros. Este processo morre quase certamente, isto é, com probabilidade 1 existe um momento a partir do qual não mais existem partículas ativas.*

9 Conclusão

Cadeias de Markov, bem como outros processos estocásticos, estão presentes em diversos problemas onde existem quantidades aleatórias variando com o tempo. Em nosso estudo consideramos um caso particular envolvendo disseminação de vírus em redes de computadores. Este tipo de processo e dinâmicas de agentes móveis espalhando informação sobre sistemas computacionais e biológicos tem sido explorado bastante nos últimos anos.

Referências

[1] ROBERT, C.; CASELLA, G., *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer; 2ª edição, 2005.

[2] R. DURRET , *Probability: theory and examples*, (2nd edn.), Duxburry, Belmont. Calif.

[3] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, New York,1966.

[4] FERRARI, P.A. E GALVES, *Acoplamento em Processos Estocásticos*, Notas para um mini-curs apresentado na XIII Escuela Venezolana de Matematicas, 2000.

[5] HOEL, P. G., PORT, S. C. E STONE, C. J., *Introduction to stochastic processes* , Waveland Press,1986.

[6] NORRIS, J.R., *Markov Chains*, Cambridge University Press,1998.

[7] MELLO, M. P. ; DOS SANTOS, J. P. O. E MURARI, I. T.C., *Introdução à análise combinatória*, Editora Ciência Moderna, 1a Edição - 2008.

[8] MARTINEZ, M.Z.; LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F.P., *Random walks systems with killing on* Z, Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes: formerly Stochastics and Stochastics Reports, 2008, Páginas 451 a 457.

[9] RIPLEY, B.D, *Stochastic Simulation* , Wiley-Interscience,1ª edição, 2006.

[10] ROSS, S. M. , *A first course in probability* , Prentice Hall; 8a edição , 2009.

[11] ROSS, S. M. , *Simulation*, Academic Press, 4a edição, 2006.

[12] S.H. ROSS , *Stochastic Processes*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1996.

[13] D. STIRZAKER , *Elementary Probability* , Cambridge University Press, 2003.

[14] D. STIRZAKER , *Stochastic Processes and Models*, Editora Oxford, 1a edição, 2005.