

# Otimização de Topologia de Estruturas 2D e 3D

Sofia Leão Carvalho<sup>1</sup>, Sylvia Regina Mesquita de Almeida<sup>2</sup>

Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil, 74605-220, Brasil

<sup>1</sup>sofialeao@gmail.com, <sup>2</sup>sylviaalm@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Otimização de topologia. 3D.

## 1 INTRODUÇÃO

Um dos papéis fundamentais do engenheiro consiste em buscar metodologias que melhorem o processo de projeto e obtenham resultados mais eficientes. A sistemática tradicional de projeto de estruturas consiste em um processo de tentativa e erro cuja eficiência depende da experiência, do conhecimento e da intuição do projetista. Ainda assim, não há garantias de que a melhor solução esteja entre as examinadas. Para fazer frente ao desafio de encontrar a melhor solução para um problema, surgiu um campo de pesquisa denominado otimização estrutural, que lança mão de técnicas matemáticas para encontrar a melhor configuração de um grupo de variáveis denominado **variáveis de projeto**, escolhido entre os parâmetros de projeto e assim obter a solução ótima. São métodos geralmente iterativos onde se procura garantir que a cada tentativa se tenha uma solução melhor que a anterior.

O critério matemático que mede a qualidade de cada solução avaliada é denominado **função objetivo**. Trata-se, portanto, de um problema de extremização (maximização ou minimização) que pode ser resolvido com uso de teorias matemáticas. Na engenharia de estruturas, a função objetivo pode expressar custo, volume ou grandezas como a flexibilidade, nesse caso expressa em termos da média da estrutura. Além disso, existem também critérios de projeto que devem ser obedecidos, impostos pelas **restrições**. As configurações das variáveis de projeto que atendem às restrições são chamadas soluções viáveis e seu conjunto forma a região viável do problema. As restrições mais comuns em problemas de engenharia estrutural são as equações de equilíbrio, os limites de utilização, os limites de resistência e os limites impostos diretamente às variáveis de projeto.

A nomenclatura dos campos de aplicação das técnicas de otimização de estruturas varia de acordo com o tipo de variável de projeto adotado e a fase da cadeia de projeto sobre a qual atua. Os tipos de otimização mais frequentemente citados na literatura (BENDSØE;

---

<sup>1</sup> Orientanda

<sup>2</sup> Orientadora

SIGMUND, 2003) são: otimização de parâmetros, otimização de forma e otimização de topologia. A **otimização de parâmetros** busca valores ótimos para determinados parâmetros de projeto, sejam eles características geométricas, propriedades dos materiais, força de protensão etc. Nesse tipo de otimização, o domínio da estrutura é fixo, ou seja, a topologia da estrutura está definida antes de se começar o processo de otimização. É aplicado, portanto, às etapas finais da cadeia de projeto, onde se aplicam critérios de resistência e de utilização. A **otimização de forma** busca a melhor forma do contorno da estrutura e as variáveis são as próprias coordenadas dos pontos que o definem. Nesse tipo de otimização, a topologia também está definida. Esse tipo de otimização aplica-se às fases intermediárias da cadeia de projeto, pois não são verificados critérios de resistência. Já a **otimização de topologia** (OT) visa obter a melhor distribuição de material em uma região do espaço, resultando ao final na estrutura que melhor satisfaz um determinado critério. A região do espaço na qual o material pode ser distribuído é denominada domínio estendido e a ela se aplica uma malha de elementos finitos para a obtenção de deslocamentos. As regiões cheias e vazias surgem naturalmente do processo, assim como a conectividade dos elementos (Figura 1), sendo indicada para as fases iniciais de um projeto, ou seja, para a fase de concepção estrutural.



Figura 1. Processo de otimização de topologia: (a) Distribuição inicial de material uniforme em todo o domínio estendido; (b) Fase intermediária do processo; (c) Solução final.

O desenvolvimento dos métodos e das aplicações de OT é relativamente recente. Trata-se de um campo de pesquisa promissor e com muitos problemas ainda em aberto. No campo das aplicações a técnica desperta interesse do meio industrial como ferramenta de auxílio no projeto de componentes estruturais e são usadas principalmente na produção de componentes na indústria automobilística, aeroespacial e biomecânica. Na engenharia civil, encontra aplicações na indústria de componentes, no desenvolvimento de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto, na indústria da construção metálica etc.

A maioria dos trabalhos acadêmicos em OT refere-se a aplicações planas (2D). No entanto, a maioria dos problemas práticos são aplicações tridimensionais (3D). Assim, a

extensão das aplicações existentes em 2D para 3D constitui um campo de grande interesse tanto do ponto de vista acadêmico como para a indústria.

## 2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é elaborar uma ferramenta auxiliar para a fase de concepção estrutural em estruturas tridimensionais (3D), usando os conceitos de otimização de topologia. Como objetivo secundário, estudam-se as diferenças de comportamento entre diferentes considerações de aplicação de carga e de condições de contorno em problemas tridimensionais.

O trabalho é uma aplicação do código educacional *99 lines*, desenvolvido por Sigmund (2001), para estruturas 2D, o qual foi ampliado e adaptado para estruturas 3D..

## 3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada neste trabalho envolve a discretização do domínio estendido de volume  $V_0$  por um método numérico de análise estrutural, no caso o Método dos Elementos Finitos (MEF). A cada elemento finito  $e$  atribui-se uma quantidade de material representada pela densidade relativa. No processo de otimização, as variáveis de projeto são as densidades associadas aos elementos,  $\rho_e$ , as quais podem variar entre 0 (zero), representando ausência de material, e 1 (um), representando material sólido.

O problema de OT estudado neste trabalho visa a maximização da rigidez da estrutura. O problema de otimização tem a forma apresentada em (1), cuja função objetivo é a flexibilidade média de estrutura. As restrições do problema são: as equações de equilíbrio; a condição de manutenção de volume constante; e as restrições laterais das variáveis de projeto.

$$\begin{array}{ll} \text{Obter} & \boldsymbol{\rho} \\ \text{Que minimiza} & c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \\ \text{Tal que} & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \frac{V(\boldsymbol{\rho})}{V_0} = f \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \end{array} \quad (1)$$

Onde:  $\boldsymbol{\rho}$  é o vetor que contém as densidades associadas aos elementos;  $c$  é a flexibilidade média da estrutura;  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura;  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura;  $\mathbf{F}$  é o vetor forças nodais aplicadas;  $V$  é o volume total de material;  $V_0$  é o

volume do domínio estendido;  $f$  é a fração de volume prescrita pelo projetista; e  $\rho_{min}$  é o valor mínimo de densidade relativa, adotado para evitar problemas de singularidade na matriz de rigidez na análise pelo MEF. Neste trabalho, adota-se o valor 0,001 para  $\rho_{min}$ .

### 3.1 O modelo SIMP de distribuição de material

Na formulação matemática de OT é necessário associar a quantidade de material em ponto qualquer da estrutura às suas propriedades físicas que influem na rigidez. Para tanto, utiliza-se o modelo de distribuição de densidades conhecido como modelo SIMP (do inglês *Solid Isotropic Material with Penalization*) (BENSØE, 1989 *apud* SIGMUND, 2007). O modelo associa o módulo de elasticidade  $E$  do material com densidade  $\rho$  ao módulo de elasticidade do material sólido  $E_0$ , conforme mostrado em (2). O modelo emprega um fator de penalização  $p$  que evita que valores intermediários de densidades apareçam na solução final, resultando em estruturas na forma de vazio-sólido (0-1).

$$E = \rho^p E_0 \quad (2)$$

### 3.2 Análise pelo método dos elementos finitos

O método de análise utilizado para elaboração dos códigos é o método dos elementos finitos (MEF), um método numérico que obtém soluções aproximadas e discretas.

A relação entre tensões  $\sigma$  e deformações  $\epsilon$  em qualquer ponto da estrutura pode ser representada matricialmente como em (3).

$$\sigma = \mathbf{E} \epsilon \quad (3)$$

Nas estruturas 3D representadas no sistema de coordenadas cartesiano  $xyz$ , os vetores das tensões e das deformações têm a forma apresentada em (4) e (5) em sua forma transposta, enquanto a matriz constitutiva elástica,  $\mathbf{E}$ , é apresentada em (6). As tensões normais são representadas por  $\sigma$ , as tensões cisalhantes por  $\tau$ , as deformações normais por  $\epsilon$  e as deformações transversais por  $\gamma$ . O coeficiente de Poisson  $\nu$  e do módulo de elasticidade  $E$  representam as propriedades mecânicas do material.

As análises 2D apresentadas neste trabalho admitem estado plano de tensão, onde as tensões fora do plano  $xy$  e as deformações cisalhantes fora deste plano são nulas.

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \rangle \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \rangle \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A relação de compatibilidade é representada matricialmente em (7). O vetor  $\mathbf{u}$  é o deslocamento de qualquer ponto da estrutura, cujas componentes são as translações  $u$ ,  $v$  e  $w$  nas direções dos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. A expressão (8) representa a matriz dos operadores diferenciais  $\nabla$ , aqui representada em sua forma transposta.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} \quad (7)$$

$$\nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A análise via MEF baseia-se na representação do comportamento no interior do elemento a partir do comportamento em pontos determinados (nós). Em termos de deslocamentos, essa representação é dada por (9), onde  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de interpolação do elemento, e  $\hat{\mathbf{u}}$  o vetor dos deslocamentos dos nós do elemento.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}} \quad (9)$$

Substituindo-se (9) em (7) obtém-se a relação de compatibilidade nodal apresentada em (10), com  $\mathbf{B}$  definida em (11).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} \quad (11)$$

Substituindo-se a equação do modelo SIMP (2) em (6) escreve-se a matriz constitutiva elástica do material com densidade re em função da matriz constitutiva elástica do material sólido  $\mathbf{E}_0$ . Assim, a matriz de rigidez do elemento pode ser escrita em função da matriz de rigidez do elemento sólido  $\mathbf{k}_e$  como em (12).

$$\mathbf{k}_e = \rho_e^p \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}_0 \mathbf{B} dV = \rho_e^p \mathbf{k}_e \quad (12)$$

A matriz de rigidez da estrutura é obtida pela montagem das matrizes dos elementos, como em (13). Resolvendo o sistema de equações algébricas lineares (14), obtém-se o vetor de deslocamentos nodais da estrutura  $\mathbf{U}$ . Para cada elemento  $e$ , o vetor de deslocamentos  $\hat{\mathbf{u}}_e$  é um subconjunto de  $\mathbf{U}$ .

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{k}_e \quad (13)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (14)$$

### 3.3 Sensibilidade

A função objetivo do problema analisado neste trabalho é a flexibilidade média da estrutura. Substituindo-se (13) na função objetivo do problema (1), tem-se:

$$c(\boldsymbol{\rho}_e) = \sum \rho_e^p \hat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{k}_e \hat{\mathbf{u}}_e \quad (15)$$

Os métodos utilizados na solução de problemas de otimização demandam o cálculo da sensibilidade da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto. No caso do problema de OT (1) as condições de equilíbrio (14) representam uma restrição indireta, que não é utilizada de forma explícita pelo algoritmo de otimização. A sensibilidade da restrição de volume constante e das restrições laterais é trivial. No cálculo da sensibilidade da função objetivo, deve-se considerar que os deslocamentos  $\hat{\mathbf{u}}_e$  são obtidos a partir da equação de equilíbrio (14) e que sofrem influência das variáveis de projeto  $\boldsymbol{\rho}_e$ . Assim, a sensibilidade da função objetivo  $c$  em relação à variável de projeto  $\rho_e$  é apresentada em (16). Mais informações podem ser obtidas em (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (16)$$

### 3.4 Problemas de instabilidade numérica em OT

As soluções de OT usando o modelo SIMP associado ao MEF estão sujeitas a instabilidades numéricas que tornam insatisfatórios os resultados. Os principais problemas são: as **soluções em tabuleiro de xadrez**, que cria padrões que alternam elementos vazios e sólidos (Figura 2a); as **soluções em ilhas** que isolam regiões de material em meio a regiões vazias sem conexão entre as partes de material (Figura 2b); e a **dependência de malhas**, onde uma melhor discretização da malha de elementos finitos resulta em uma estrutura cada vez mais detalhada, ao invés de apresentar uma melhor definição dos contornos (Figuras 2c e 2d).

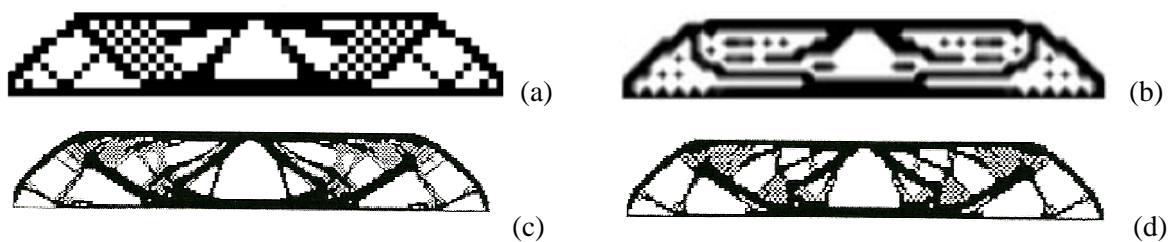


Figura 2. Problemas de instabilidade numérica: (a) Tabuleiro de damas; (b) Solução em ilhas; (c) Dependência de malha – solução com malha de 240x40 elementos (TRALDI, 2010); (d) Dependência de malha – solução com malha de 180x30 elementos (TRALDI, 2010).

O desenvolvimento de métodos de regularização para controlar essas instabilidades é um dos problemas em aberto da OT, sendo abordado por vários autores (GUEST; PREVOST; BELYTCHKO, 2004, SIGMUND, 2007 e ALMEIDA; PAULINO; SILVA, 2010). A maioria dos esquemas de regularização são heurísticos e envolvem algum tipo de correção do campo de densidades ou do campo de sensibilidades através de uma média ponderada dos seus valores em uma vizinhança do elemento.

O método de controle de instabilidades mais difundido é o filtro de sensibilidade de Sigmund (SIGMUND, 2001), que corrige a sensibilidade da função objetivo  $c$  em relação à densidade  $\rho_i$  utilizando as densidades dos elementos  $\rho_j$  localizados dentro da região esférica (no caso 3D) ou circular (no caso 2D). A sensibilidade corrigida é dada por (17).

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\rho_i \sum_{j=1}^N H_j} \sum_{j=1}^N H_j \rho_j \frac{\partial c}{\partial \rho_j} \quad (17)$$

Com:

$$H_j = r_{min} - \text{dist}(i, j),$$

$$\{f \in N \mid \text{dist}(i, j) \leq r_{min}\}, i = 1, \dots, N \quad (18)$$

Onde:  $i$  é o índice do elemento que se deseja corrigir a sensibilidade;  $j$  é o índice de cada elemento dentro da região atingida pelo filtro na vizinhança do elemento de índice  $i$ ;  $\rho$  é a densidade dos elementos com índices  $i$  e  $j$ ;  $N$  é o número de elementos finitos da malha;  $H_j$  é o operador de convolução de cada elemento com índice  $j$ , definido em (18);  $\text{dist}(e, f)$  a distância entre o centro do elemento  $e$  e o centro do elemento  $f$ ; e  $r_{min}$  é o raio do domínio.

A Figura 3 apresenta as soluções obtidas com e sem a aplicação do filtro de sensibilidade de Sigmund.

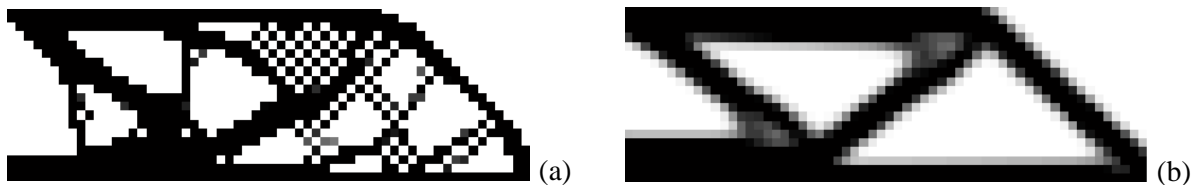


Figura 3. Solução de 60X20 elementos : (a) sem filtro (tabuleiro de xadrez); e (b) com filtro.

### 3.5 Tópicos da implementação computacional

As soluções pelo MEF utilizam dois sistemas de numeração dos nós da estrutura, um global, de toda a estrutura, e outro local, característico do elemento. Na implementação computacional realizada neste trabalho numeram-se os nós na sequência apresentada na Figura 4: primeiro numeram-se os nós do eixo  $z$ , depois do eixo  $y$  e, por último do eixo  $x$ .

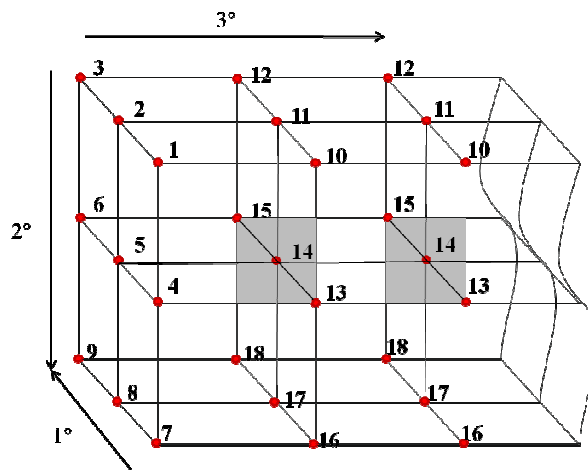


Figura 4. Numeração dos nós da estrutura.



Neste trabalho, os elementos utilizados nas análises 2D são quadrados, enquanto os utilizados nas análises 3D são cubos, ambos de dimensões unitárias. As Figuras 5<sup>a</sup> e 5<sup>b</sup> representam a numeração local dos nós nas estruturas 2D e 3D, respectivamente.

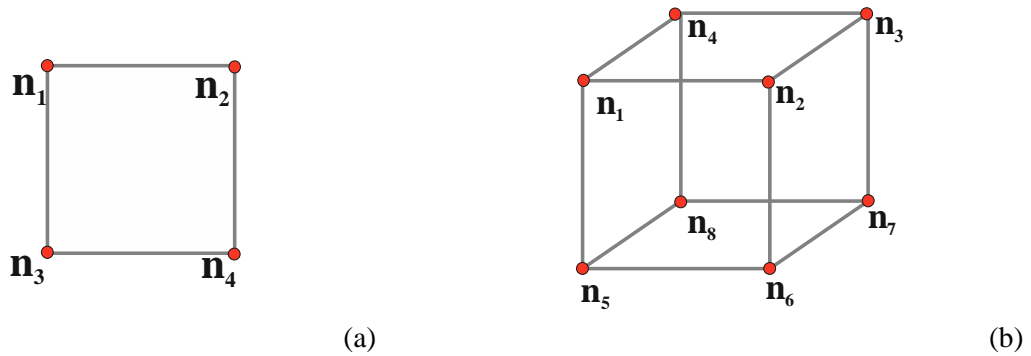


Figura 5. Numeração local de nós dos elementos: (a) em 2D; e (b) em 3D.

Os graus de liberdade tanto no elemento como na estrutura são numerados seguindo a numeração dos nós e, para o nó, seguindo a ordem dos eixos cartesianos. As Figuras 6<sup>a</sup> e 6<sup>b</sup> representam os graus de liberdade do elemento segundo a numeração da estrutura nos dados 2D e 3D, respectivamente.

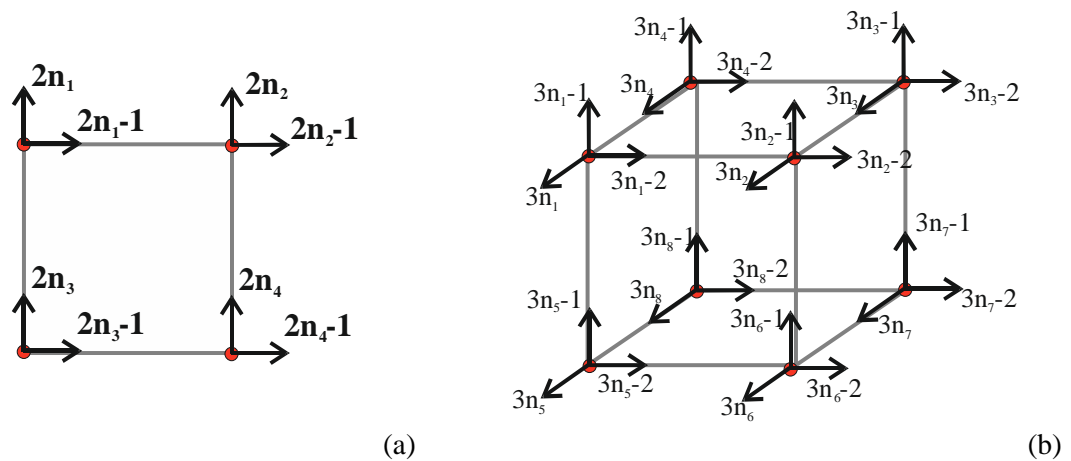


Figura 6. Numeração dos graus de liberdade dos elementos: (a) em 2D; e (b) em 3D.

A análise da estrutura pelo MEF é uma etapa do algoritmo de OT. Seu objetivo é a obtenção do vetor deslocamento da estrutura  $\mathbf{U}$  (Figura 7) que é usado em seguida no cálculo da flexibilidade média da estrutura. A Figura 7 mostra o fluxo de procedimentos dessa análise.

A solução do problema de otimização é essencialmente um processo iterativo que envolve o cálculo da função objetivo e verificação das restrições, o cálculo das sensibilidades e a obtenção das novas variáveis de projeto usando um método de otimização e a verificação da convergência. No caso de OT o cálculo da função objetivo é precedido pela análise da estrutura via MEF e a análise de sensibilidade é sucedida pela correção das sensibilidades com o filtro de Sigmund. O fluxograma do processo de OT é apresentado na Figura 8.

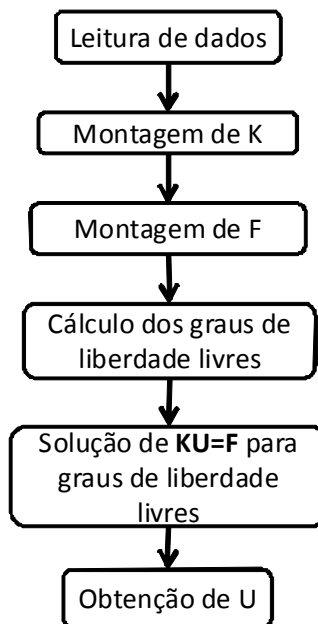


Figura 7. Etapas da Análise de MEF.

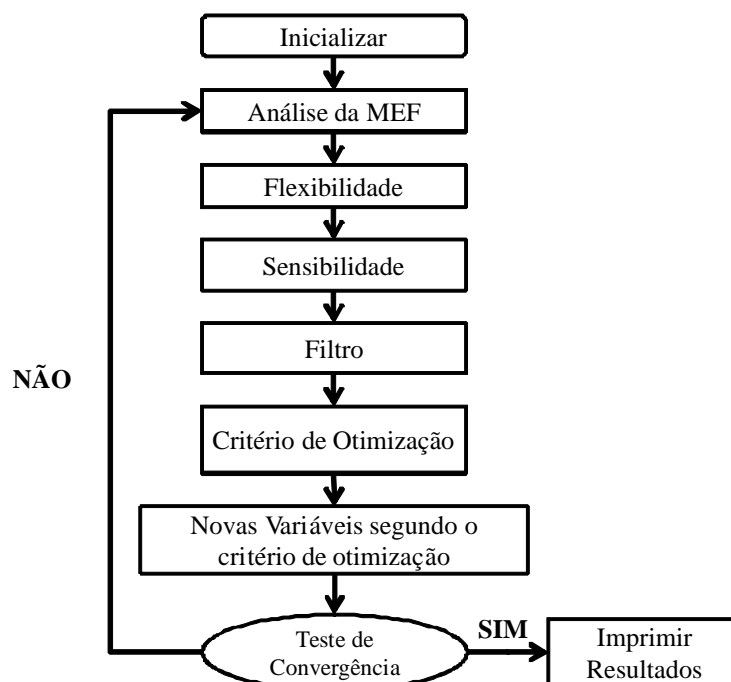


Figura 8. Fluxograma da implementação computacional.

## 4 RESULTADOS

Os exemplos de aplicação apresentados nesse trabalho visam validar a implementação, comparar as soluções obtidas em 2D e 3D e explorar as diferenças de soluções 3D devido a variações de carregamento. Em todos os exemplos adotou-se fração de volume de 50%, fator de penalidade 3 e raio mínimo  $r_{\min} 1,5$ . As propriedades mecânicas são: módulo de elasticidade do material sólido unitário e coeficiente de Poisson 0,3. Ressalta-se que, embora grandezas como carga e módulo de elasticidade modifiquem o valor da flexibilidade, eles não interferem na disposição de material da solução final.

### 4.1 Exemplo 1

A primeira aplicação analisada neste trabalho é a viga MBB, o primeiro caso de aplicação prática de OT. Trata-se da viga de sustentação do piso da área de passageiros de aviões comerciais, com relação de aspecto 6:1, apresentada na Figura 9. O domínio estendido foi discretizado em uma malha de elementos finitos de 120 x 20 elementos.

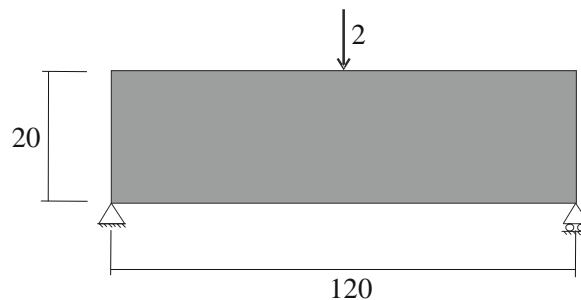


Figura 9. Exemplo 1.

A Figura 10 apresenta os resultados obtidos em duas representações de cores, a tradicional apresentada na maior parte dos trabalhos da literatura, cartela de cores variando de branco (vazio) a preto (sólido), e a adotada nos trabalhos de Guest, Prevost e Belytchko (2004) e de Almeida, Paulino e Silva (2010), em cartela de cores variando de azul (vazio) a vermelho (sólido). A representação azul – vermelho permite a melhor visualização de regiões com densidades intermediárias (em torno de 0,9), mascarada na representação branco – preto. Assim, nas análises seguintes as soluções são apresentadas na representação azul – vermelho.

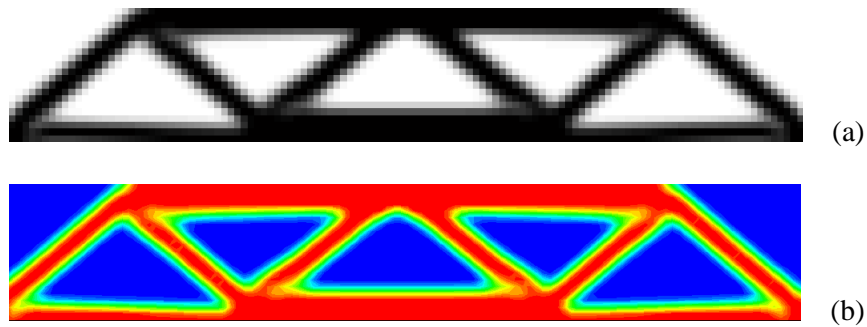


Figura 10. Visualização dos resultados em diferentes cartelas de cores: (a) cartela de cores branco – preto; (b) cartela de cores azul – vermelho.

## 4.2 Exemplo 2

A segunda aplicação analisada é uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra, com relação de aspecto 7:4 e carga unitária na extremidade livre. Foram analisadas duas posições de carga, no canto inferior e no meio da face da extremidade livre (Figuras 11<sup>a</sup> e 11b, respectivamente).

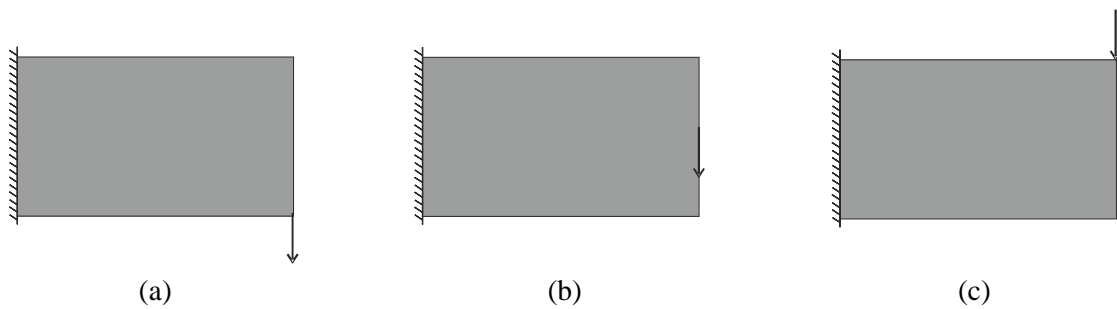


Figura 11. Exemplo 2: (a) carga no canto inferior; (b) carga no meio da extremidade livre; (c) carga no canto superior.

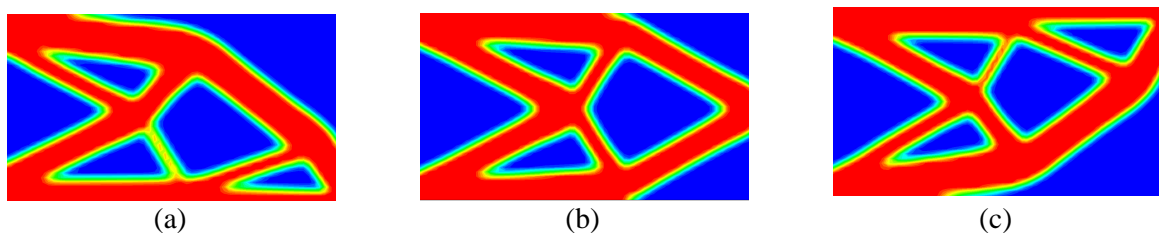


Figura 12. Soluções do exemplo 2: (a) carga no canto inferior; (b) carga no meio da extremidade livre; (c) carga no canto superior.

As soluções obtidas são apresentadas na Figura 12. Observa-se que o posicionamento da carga altera a topologia da solução ótima. Os resultados são consistentes e serão usados para validar as análises do exemplo 3 em estruturas tridimensionais.

### 4.3 Exemplo 3

As vigas engastada das Figuras 11a e 11b foram analisadas com a implementação computacional para estruturas 3D. Em todas as análises foi utilizada malha de elementos finitos com 35x20x4 elementos. Cada uma das vigas foi analisada com carga uniformemente distribuída e com a resultante da carga concentrada em um nó.



Figura 13. Exemplo 3: (a) carga no canto inferior; (b) carga no meio da extremidade livre.

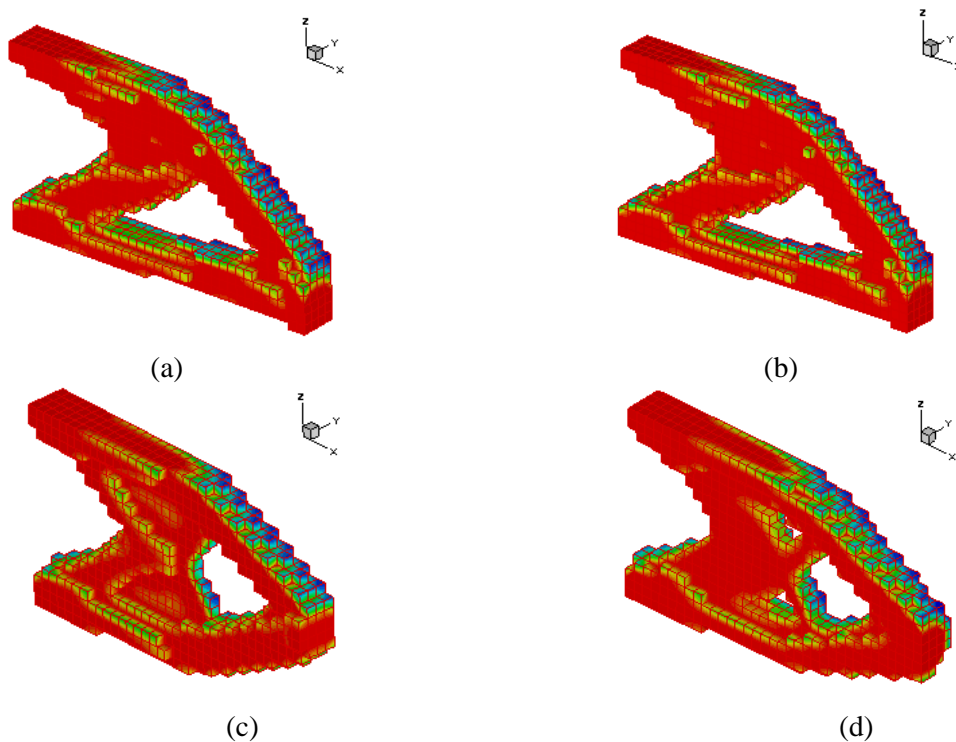


Figura 14. Resultados de exemplo 3: (a) viga com carga distribuída uniforme na aresta inferior da extremidade livre; (b) viga com carga distribuída uniforme no meio da face livre; (c) viga com carga concentrada no meio da aresta inferior da extremidade livre; (d) viga com carga concentrada no ponto central da face livre.

A Figura 14 apresenta os resultados obtidos nas quatro análises realizadas. Observa-se que os resultados obtidos com as cargas distribuídas reproduzem aqueles obtidos na análise bidimensional (Figuras 14a e 12a e Figuras 14b e 12b, respectivamente), o que valida a implementação computacional realizada neste trabalho. Comparando-se os resultados das Figuras 14a e 14 b, obtidos com a carga distribuída uniforme, com os das Figuras 14c e 14d, respectivamente, verifica-se uma mudança sutil na solução, com redução de material nas bordas da estrutura. Esse resultado é coerente com a mecânica do problema.

## 5 DISCUSSÃO

Os exemplos apresentados permitiram a obtenção da topologia ótima de estruturas 2D e 3D partindo de uma distribuição uniforme de material. As soluções obtidas foram coerentes com o comportamento mecânico das estruturas.

O primeiro exemplo permitiu a validação da implementação 2D e reproduziu a hipótese da treliça de Mörsh, utilizada no dimensionamento de estruturas de concreto armado, a cisalhamento. Essa constatação é importante, pois permite a ampliação dos estudos de OT para a identificação de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado cuja relação de aspecto corresponda a vigas-parede.

O segundo exemplo (2D) serviu de base para a validação da implementação computacional em 3D. A mudança da posição da carga mostra sua influência sobre a topologia final. O terceiro exemplo (3D) foi analisado em duas etapas. Na primeira a carga foi aplicada distribuída no canto inferior e no meio da face livre (Figuras 14a e 14b respectivamente). Observou-se que as soluções obtidas para a estrutura tridimensional são semelhantes às obtidas para a estrutura bidimensional nos planos correspondentes aos planos da bidimensional. Assim, a análise da estrutura 3D com carga distribuída reproduz as respectivas situações da análise 2D, o que valida a implementação computacional.

A segunda etapa da análise foi feita quando a carga distribuída foi substituída por sua resultante. Nessa análise, observou-se um afinamento discreto da terceira dimensão quando os cantos são desnecessários (baixa densidade de material) à aplicação dessa carga. Esse afinamento foi pouco perceptível no caso da viga com carga no canto inferior e mais perceptível no caso da viga com carga no meio da face livre. A tendência se evidenciaria no caso em que se usasse mais elementos na direção da largura da viga, o que não foi possível com a plataforma MATLAB utilizada.

## 6 CONCLUSÃO

A implementação computacional realizada neste trabalho mostrou que é possível resolver pequenos problemas de OT com uma implementação simples. O trabalho também permitiu explorar os principais conceitos envolvendo o tema, com uma abordagem simplificada em termos da formulação da análise pelo MEF. Sua expansão para problemas de geometria mais complexas é natural e envolve média dificuldade.

A principal limitação encontrada foi a capacidade da linguagem MATLAB em relação à obtenção de soluções de sistemas algébricos com grande número de variáveis. Devido ao grande número de variáveis de projeto e as equações de equilíbrio, o tempo de execução foi alto, o que dificulta a otimização de estruturas de maior porte, chegando em alguns casos a inviabilizá-la. Portanto, sugere-se para evolução do trabalho a transposição para uma linguagem de programação mais poderosa como a linguagem C.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA S.R.M., PAULINO G.H., SILVA E.C.N. A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, vol. 39(4), pp 359-371, 2009.

BENDSØE M.P., SIGMUND O. **Topology optimization: theory, methods and applications**. 2 ed. New York: Springer Verlag, 2003.

GUEST J.K., PRÉVOST J.H., BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, West Sussex, vol 61, nº 2, pp 238-254, 2004.

SIGMUND O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, vol 21(2), p 120–127, 2001.

SIGMUND O. Morphology-based black and white filters. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Berlin, vol 33(6), p 401–424, 2007.

TRALDI M.A.B. **Otimização de Topologia de estruturas e componentes**. 2010. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Estruturas) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2010.