Eliana Carla Rodrigues, Jhone Caldeira

Universidade Federal de Goiás, CEP 74001-970, Brasil

elianacarlarodri@gmail.com, jhone@mat.ufg.br

Uma Introdução às Álgebras de Lie e suas Representações

Palavras-chave: Álgebra de Lie, solubilidade, nilpotência, representação.

1 Introdução

As Álgebras de Lie surgiram com as pesquisas do matemático Sophus Lie (1842-1899) cujo intuito inicial era estender a teoria de Galois às equações diferenciais. Posteriormente, devido às suas descobertas, Lie passa a dedicar seus estudos a essa nova estrutura. De grande aplicação em várias áreas da Matemática e da Física, a teoria das Álgebras de Lie semissimples é inerentemente interessante e vasta.

Neste trabalho, foi feito um estudo introdutório das álgebras de Lie e suas representações no intuito de promover o contato com a pesquisa matemática.

2 Objetivos

Apresentar as ideias principais da Teoria das Álgebras de Lie, sobretudo o estudo de conceitos como *derivação, homomorfismo, solubilidade, nilpotência, semissimplicidade* e *representação*, bem como importantes resultados relativos a esses conceitos.

3 A Noção de Álgebra de Lie e Derivações

Definição 3.1. Uma *Álgebra de Lie* L é um espaço vetrorial sobre um corpo F, munido de uma operação $[,]: L \times L \longrightarrow L$ chamada *colchete* ou *comutador* de x e y, que satisfaz os seguintes axiomas:

(L1) a operação colchete é bilinear;

(L2) $[x, x] = 0$, para todo $x \in L$;

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para quaisquer x, y e z pertencentes a L.

O axioma (L3) é chamado *Identidade de Jacobi.*

(L1) e (L2) aplicados a $[x+y, x+y]$ implicam a anticomutatividade: (L2)' $[x, y] = -[y, x]$. Reciprocamente, (L2)' implica (L2), quando a característica de F é diferente de 2.

Definição 3.2. A *dimensão* de uma álgebra de Lie L é sua dimensão como espaço vetorial.

Definição 3.3. Um subespaço K de uma álgebra de Lie L é chamado uma *subálgebra* (*de Lie*) de L se $[x, y] \in K$, para quaisquer $x, y \in K$.

Por $(L2)$, qualquer elemento não nulo pertencente a L define uma subálgebra unidimensional com o mesmo produto de L.

Exemplo 3.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre F. Defina $EndV = \{T : V \longrightarrow V;$ T é transformação linear$\}$. Como um espaço vetorial sobre F, $EndV$ tem dimensão n^2 e é uma álgebra associativa relativamente ao produto usual. É de fácil verificação que, com a operação colchete, $EndV$ é uma álgebra de Lie sobre F.

Para distinguir esta nova estrutura, denotaremos $gl(V)$ por $EndV$ visto como uma álgebra de Lie e a chamaremos *Álgebra Linear Geral* (devido à sua relação com o *Grupo Linear Geral*, que consiste dos endomorfismos invertíveis sobre V).

Definição 3.4. Qualquer subálgebra da álgebra de Lie $gl(V)$ é chamada *Álgebra de Lie Linear.*

Mencionaremos agora um importante exemplo de subálgebra de Lie linear.

Exemplo 3.2. Sejam $T(n, F)$ o conjunto das matrizes triangulares superiores, $N(n, F)$ o conjunto das matrizes triangulares estritamente superiores e $D(n, F)$ o conjunto das matrizes diagonais. É fácil verificar que esses conjuntos são fechados em relação à operação colchete e ainda que

$$T(n, F) = D(n, F) \oplus N(n, F),\ [D(n, F), N(n, F)] = N(n, F) \text{ e } [T(n, F), T(n, F)] = N(n, F).$$

Exemplo 3.3. Subálgebras de $gl(V)$.

(a) $so(V) = \{X \in gl(V);\ X + X^t = 0\}$, onde X^t indica a transposta da matriz X.

O espaço das matrizes simétricas $\{X \in gl(V); X = X^t\}$ não é subálgebra se $n \geq 2$, pois se X e Y são simétricas, então $[X, Y]$ é antissimétrica.

(b) $sl(V) = \{X \in gl(V);\ TrX = 0\}$.

Algumas álgebras de Lie de transformações lineares surgem naturalmente como derivações de álgebras.

Definição 3.5. Seja A uma álgebra. Uma aplicação linear $\delta : A \longrightarrow A$ satisfazendo a regra $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ é chamada *derivação*.

Denotaremos por *DerA* o conjunto de todas as derivações de A.

Exemplo 3.4. $DerA$ é uma subálgebra de $gl(V)$, isto é, $DerA$ é um subespaço vetorial de $EndV$ e é fechado em relação à operação colclhete.

Demonstração. $DerA \subset EndV$. Sejam δ_1, $\delta_2 \in DerA$ e $\alpha \in F$.

$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = (\alpha\delta_1)(xy) + (\delta_2)(xy)$

$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = x(\alpha\delta_1)(y) + (\alpha\delta_1)(x)y + x\delta_2(y) + \delta_2(x)y$

$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = x((\alpha\delta_1)(y) + \delta_2(y)) + ((\alpha\delta_1)(x) + \delta_2(x))y$

$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = x((\alpha\delta_1 + \delta_2)(y)) + ((\alpha\delta_1 + \delta_2(x))(x))y.$

Logo $DerA$ é subespaço vetorial de $EndV$.

Mostraremos agora, que $[\delta_1, \delta_2]$ ainda é uma derivação:

$[\delta_1, \delta_2](xy) = \delta_1\delta_2(xy) - \delta_2\delta_1(xy)$

$[\delta_1, \delta_2](xy) = \delta_1(x(\delta_2(y) + \delta_2(x)y)) - \delta_2(x(\delta_1(y) + \delta_1(x)y))$

$[\delta_1, \delta_2](xy) = x(\delta_1(\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(y))) + (\delta_1(\delta_2(x)) - \delta_2\delta_1(x))y$

$[\delta_1, \delta_2](xy) = x[\delta_1, \delta_2](y) + [\delta_1, \delta_2](x)y.$ ■

Observação 3.4.1 Não é necessariamente verdade que o produto ordinário de duas derivações é ainda uma derivação.

Certas derivações surgem naturalmente como no

Exemplo 3.5. Seja $x \in L$. Definimos $adx : L \longrightarrow L$ por $adx(y) = [x, y]$, que é uma derivação de L.

Demonstração. É de fácil verificação que $adx \in EndV$. Para mostrar que $adx([y, z]) = yadx(z) + adx(y)z$, basta observar que usando (L2)' podemos reescrever a Identidade de Jacobi da seguinte forma $[x[y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$. ■

4 Ideais, Homomorfismos e Representações

4.1 Ideais e Homomorfismos

Definição 4.1.1. Um subespaço I de uma álgebra de Lie L é um *ideal* de L quando $x \in L,\ y \in I$ implica $[x, y] \in I$.

Os ideais desempenham na teoria das álgebras de Lie, o mesmo papel dos subgrupos normais na teoria dos grupos e dos ideais bilaterais na teoria dos anéis. Será visto adiante que eles surgem como núcleos de homomorfismos.

Trivialmente, o subespaço que consiste apenas do vetor nulo e L são ideais de L.

Exemplo 4.1.1. O *centro* da álgebra de Lie L, definido por $Z(L) = \{z \in L; [x, z] = 0, \forall\ x \in L\}$, é um ideal de L.

Definição 4.1.2. Seja L uma álgebra de Lie, se $[x, y] = 0$ para todo $x,\ y \in L$, dizemos que L é *abeliana.*

Assim, L é abeliana se, e somente se, $Z(L) = L$.

Exemplo 4.1.2. Um exemplo importante de ideal de uma álgebra de Lie L é a *álgebra derivada*, denotada por $[L, L]$, ela é análoga ao subgrupo comutador de um grupo. Esta álgebra consiste de todas as combinações lineares dos comutadores $[x, y]$ com $x, y \in L$.

Deste modo, L é abeliana se, e somente se, $[L, L] = 0$.

Exemplo 4.1.3. Se *I* e *J* são dois ideais da álgebra de Lie *L*, então $I + J = \{x + y;\ x \in I,\ y \in J\}$ e $[I, J] = \{\sum a_{ij}[x_i, y_j];\ x_i \in I,\ y_i \in J\}$ também são ideais de *L*.

É natural analisar a estrutura de uma álgebra de Lie olhando para seus ideais. Se L não possuir ideais não triviais e, além disso, se $[L, L] \neq 0$, L é dita uma álgebra *simples*.

Assim, L simples implica $Z(L) = 0$ e $L = [L, L]$.

No caso de uma álgebra de Lie L não ser simples (e não unidimensional) é possível extrair de *L* um ideal próprio I e então obter uma álgebra de Lie de dimensão "menor", a *álgebra quociente* L/I, cuja construção formal é a mesma de um anel quociente.

Como um espaço vetorial, L/I é simplesmente o espaço quociente e seu produto de Lie está bem definido por: $[x + I, y + I] = [x, y] + I$.

Para uso posterior, definiremos duas noções relacionadas. Elas são análogas àquelas definidas na teoria dos grupos.

Definição 4.1.3. O *normalizador* de uma subálgebra (ou apenas um subespaço) K de uma álgebra de Lie L é definido por $N_L(K) = \{x \in L;\ [x, L] \subset K\}$.

$N_L(K)$ é uma subálgebra de Lie de L e é descrita como a maior subálgebra de L que possui K como ideal.

Definição 4.1.4. O *centralizador* de um subconjunto $X \subset L$ é $C_L(X) = \{x \in L;\ [x, X] = 0\}$.

Utilizando a Identidade de Jacobi, demonstra-se que $C_L(X)$ é subálgebra de L. No caso particular em que $X = L$, tem-se $C_L(L) = Z(L)$.

4.2 Homomorfismos e Representações

Definição 4.2.1. Sejam L, L' álgebras de Lie sobre F e $\phi : L \longrightarrow L'$ uma transformação linear. Dizemos que:

(a) ϕ é um *homomorfismo* se $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, para todos $x, y \in L$.

(b) ϕ é um *monomorfismo*, se $\mathrm{Ker}\phi = 0$.

(c) ϕ é um *epimorfismo*, se $\mathrm{Im}\phi = L'$.

(d) ϕ é um *isomorfismo*, se ϕ é monomorfismo e epimorfismo.

(e) ϕ é um *automorfismo*, se ϕ é um *isomorfismo* de L sobre L.

Observação 4.2.1. $\mathrm{Ker}\phi$ é um ideal de L e $\mathrm{Im}\phi$ é uma subalgebra de L'.

Como nas demais teorias algébricas, existe uma bijeção natural entre homomorfismos e ideais: a ϕ associamos $\mathrm{Ker}\phi$ e ao ideal I associamos a *aplicação canônica* que leva x em $x + I \in L/I$.

Apresentaremos a seguir um importante resultado.

Teorema 4.2.1. (Teoremas do Isomorfismo)
(a) Se $\phi : L \longrightarrow L'$ é um isomorfismo de álgebras de Lie, então $\frac{L}{\mathrm{Ker}\phi} \cong \mathrm{Im}\phi$.

(b) Se I e J são ideais de L tais que $I \subset J$, então $\frac{J}{I}$ é um ideal de $\frac{L}{I}$ e $\frac{L/I}{J/I}$ é isomorfo a $\frac{L}{J}$.

(c) Se I e J são ideais de L, então existe um isomorfismo natural entre $\frac{I+J}{J}$ e $\frac{I}{I\cap J}$.

Definição 4.2.2. Sejam V um espaço vetorial e $gl(V)$ a álgebra de Lie de transformações lineares de V. Seja L uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma *representação* de L em V é um homomorfismo $\phi : L \longrightarrow gl(V)$.

Exemplo 4.2.1. A aplicação linear $ad : L \longrightarrow DerL$ que leva x em adx define uma representação de L, chamada *representação adjunta*.

Demonstração. O fato de ad ser transformação linear decorre imediatamente da bilinearidade do colchete.

Mostraremos que ad é um homomorfismo.

$$\begin{aligned} [adx, ady](z) &= adxady(z) - adyadx(z) \\ &= adx([y,z]) - ady([x,z]) \\ &= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] - [y,[x,z]] \\ &= [[x,y],z] \\ &= ad[x,y](z). \end{aligned}$$

5 Álgebras de Lie Solúveis, Nilpotentes e o Teorema de Engel

5.1 Solubilidade

Nesta seção vamos estudar a formação das álgebras derivadas.

Definição 5.1.1 A sequência de ideais de L definida por $L^{(0)} = L,\ L^{(1)} = [L,L],\ L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \ldots$, $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$ é chamada *série derivada*.

Definição 5.1.2. Diz-se que L é *solúvel* se $L^{(n)} = 0$ para algum inteiro positivo n.

Claramente temos que toda álgebra de Lie abeliana é solúvel.

Exemplo 5.1.1. $T(n, F)$ é solúvel.

Teorema 5.1.1. Seja L uma álgebra de Lie.
(a) Se L é solúvel, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de L são solúveis.

(b) Se I é um ideal solúvel de L tal que $\frac{L}{I}$ é solúvel, então L é solúvel.

(c) Se I, J são ideais solúveis de L, então $I + J$ é solúvel.

Exemplo 5.1.2. Sejam L uma álgebra de Lie arbitrária e S um ideal maximal solúvel. Se I é um ideal solúvel qualquer de L, então pelo Teorema 5.1.1(c) temos que $S + I = S$, ou seja, $I \subset S$. Isto mostra a existência de um único ideal maximal solúvel, o chamaremos *radical* de L e denotaremos por $RadL$. Quando $RadL = 0$, diz-se que L é *semissimples*.

Note que uma álgebra simples é semissimples.

5.2 Nilpotência

A definição de solubilidade imita a noção correspondente na teoria dos grupos, a qual remete a Abel e Galois. Por outro lado, a noção de grupo nilpotente é mais recente, e é modelada na noção correspondente para álgebras de Lie.

Definição 5.2.1. A sequência de ideais de L definida por $L^0 = L, L^1 = [L, L](= L^{(1)}), L^2 = [L, L^1], \ldots, L^i = [L, L^{i-1}]$ é chamada *série central descendente.*

Definição 5.2.2. L é *nilpotente* se $L^n = 0$ para algum inteiro positivo n.

Note que toda álgebra abeliana é nilpotente.

Como $L^{(i)} \subset L^i$ para todo i, temos que toda álgebra nilpotente é solúvel. A recíproca é falsa.

Teorema 5.2.1. Seja L uma álgebra de Lie.

(a) Se L é nilpotente, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de L são nilpotentes.

(b) Se $\frac{L}{Z(L)}$ é nilpotente, então L é nilpotente.

(c) Se L é nilpotente e não-zero, então $Z(L) \neq 0$.

A condição para L ser nilpotente pode ser escrita como segue: para algum n (dependendo somente de L), $adx_1 adx_2 \cdots adx_n(y) = 0$, para todos $x_i, y \in L$. Em particular, $(adx)^n = 0$ para todos $x \in L$.

Definição 5.2.3. Se L é uma álgebra de Lie qualquer e $x \in L$, dizemos que x é *ad-nilpotente* se adx é um endomorfismo nilpotente.

Com esta linguagem, concluímos que se L é nilpotente então todos os elementos de L são ad-nilpotentes. Demonstraremos no Teorema de Engel que a recíproca deste resultado é verdadeira.

5.3 O Teorema de Engel

Lema 5.3.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $X \in gl(V)$ um endomorfismo nilpotente. Então adX também é nilpotente.

Demonstração. Note que $(adX)^n(Y)$ é a soma de termos da forma $\pm X^i Y X^j$, onde $i + j = n$. Assim, se $X^k = 0$, então $(adX)^{2k-1} = 0$, para todo $y \in gl(V)$. ■

Uma transformação linear nilpotente sempre tem pelo menos um autovetor, correspondendo ao seu único autovalor zero. Este é o caso em que $dimL = 1$ do próximo teorema. Ele será utilizado na demonstração do Teorema de Engel.

Teorema 5.3.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e L uma álgebra de $gl(V)$. Se L consiste de endomorfismos nilpotentes e $V \neq 0$, então existe $0 \neq v \in V$ para o qual $Lv = 0$.

Veja a demonstração em [Hum, pg 13].

Teorema 5.3.2. (Teorema de Engel) Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então L é nilpotente se, e somente se, todos os elementos de L são ad-nilpotentes.

Demonstração. Uma parte do teorema já foi demonstrada no Lema 5.3.1.

Suponhamos que L é uma álgebra de Lie cujos elementos são ad-nilpotentes. Assim, a álgebra $adL \subset gl(V)$ satisfaz as condições do Teorema 5.3.1 (podemos admitir $L \neq 0$). Concluímos que existe $0 \neq X \in L$ para o qual $adL(X) = [L, X] = 0$, isto é, $Z(L) \neq 0$. Logo $\frac{L}{Z(L)}$ consiste de elementos ad-nilpotentes e tem dimensão menor do que a dimensão de L.

Usando indução sobre a ordem de L, temos que: se $dimL = 0$, então $\frac{L}{Z(L)}$ é nilpotente. Logo, L é nilpotente. Se $dimL = 1$, considere X um gerador de L. Por hipótese, X é ad-nilpotente, ou seja, existe um inteiro positivo n tal que $(adX)^n = 0$, isto é, $[X, [X, [\dots, [X, Y] \dots]]] = 0$, para todo $Y \in L$. Logo qualquer comutador com $n + 1$ elementos de L é zero. Portanto, L é nilpotente.

Suponhamos por hipótese de indução que $\frac{L}{Z(L)}$ é nilpotente. Pelo Teorema 5.2.1(b), segue que L é nilpotente. ■

Podemos discutir o significado do Teorema de Engel olhando para os colchetes sucessivos na álgebra. Por um lado, uma álgebra é nilpotente se todos os produtos que envolvem uma certa quantidade de elementos é zero. Agora para que a representação adjunta de L seja nilpotente, a condição é mais fraca, pois exigimos apenas que certos produtos que envolvem dois elementos, um deles aparecendo uma única vez, seja zero. O interessante nesse caso é que o número de produtos não é fixo para todos os pares de elementos e o anulamento desses produtos levam à nilpotência da álgebra L.

Exemplo 5.3.1. $N(n, F)$ é nilpotente. De fato, basta aplicar o Lema 5.3.1 e o Teorema de Engel.

6 O Teorema de Lie e o Critério de Cartan

O próximo teorema é semelhante ao Teorema 5.3.1, mas requer o fechamento algébrico de F, de modo que podemos assumir que F contém todos os autovalores requeridos. Assumiremos também que F é de característica zero.

Teorema 6.1. Seja V um subespaço vetorial de dimensão finita e L uma subálgebra solúvel de $gl(V)$. Se $V \neq 0$, então V contém um autovetor comum a todos os endomorfismos de L.

A demonstração será omitida por ser essencialmente análoga à demonstração do Teorema 5.3.1.

Corolário 1. (Teorema de Lie) Seja V um subespaço vetorial de dimensão finita e L uma subálgebra solúvel de $gl(V)$. Então existe uma base de V em relação à qual as matrizes de L são triangulares superiores.

Demonstração. Basta usar o Teorema 6.1 e indução sobre a dimensão de V. ■

Corolário 2. Seja L uma álgebra de Lie solúvel. Então, para todo $x \in [L, L]$, temos que adx é nilpotente. Em particular, $[L, L]$ é nilpotente.

A seguir, obteremos um critério para a solubiblidade de uma álgebra de Lie L baseado no traço de certos endomorfismos de L. Antes disso, recordemos uma identidade usual: se x, y, z são endomorfismos de um espaço vetorial de dimensão finita, então $Tr([x,y]z) = Tr(x[y,z])$.

Lema 6.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $A \in B$ subespaços de $gl(V)$ e $M = \{x \in gl(V); [x, B] \in A\}$. Se $x \in M$ satisfaz $Tr(xy) = 0$ para todo $y \in M$, então x é nilpotente.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [Hum, pg 19].

Teorema 6.2 (Critério de Cartan). Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e L uma subálgebra de $gl(V)$. Se $Tr(xy) = 0$, para todo $x \in [L, L], y \in L$, então L é solúvel.

Demonstração. É suficiente mostrar que $[L, L]$ é nilpotente, ou simplesmente que qualquer $x \in [L, L]$ é um endomorfismo nilpotente. Para isso, aplicamos o Lema 5.3.1 à seguinte situação: V espaço vetorial de dimesão finita, $A = [L, L], B = L$ e $M = \{x \in gl(V); [x, L] \subset [L, L]\}$. Claramente $L \subset M$. A hipótese é $Tr(xy) = 0$ para $x \in [L, L], y \in L$, donde para concluir do Lema 6.1 que cada $x \in [L, L]$ é nilpotente, precisamos de um resultado mais forte: $Tr(xy) = 0$ para $x \in [L, L], y \in M$.

Se $[x, y]$ é um gerador de $[L, L]$, e se $z \in M$ então a identidade mostra que $Tr([x, y]z) = Tr(x[y, z]) = Tr([y, z]x)$. Pela definição de M, $[x, y] \in [L, L]$, então pela hipótese o lado direito é zero. ∎

Corolário. Seja L uma álgebra de Lie tal que $Tr(adx\ ady) = 0$ para quaisquer $x \in [L, L], y \in L$. Então L é solúvel.

Demonstração. Aplicando o critério de Cartan para a representação adjunta de L, obtemos que adL é solúvel. Como $Ker\ ad = Z(L)$ é solúvel, segue dos itens (a) e (b) do Teorema 5.1.1 que L é solúvel.

7 Forma de Killing

Definição 7.1. Sejam $x, y \in L$. A forma bilinear simétrica sobre L definida por $k(x, y) = Tr(adx\ ady)$ é chamada *forma de Killing*.

Observação. k é associativa, no sentido de que $k([x, y], z) = k(x, [y, z])$. Isto decorre da identidade $Tr([x, y]z) = Tr(x[y, z])$, para endomorfismos x, y, z sobre um espaço vetorial de dimensão finita.

Lema 7.1. Seja I um ideal de L. Se k é a forma de Killing de L e k_I a forma de Killing de I (visto como álgebra de Lie), então $k_I = k\,|_{I \times I}$.

Definição 7.2. Uma forma bilinear simétrica $\beta(x, y)$ é dita *não-degenerada* se seu radical S é zero, onde $S = \{x \in L; \beta(x, y) = 0$, para todo $y \in L\}$.

Teorema 7.1. (Critério para Semissimplicidade) Seja L uma álgebra de Lie. Então L é semissimples se, e somente se, sua forma de Killing é não-degenerada.

8 Representações de $sl(2)$

Definição 8.1. Uma representação ϕ de L em V é dita *irredutível* se os únicos subespaços invariantes por ϕ são os triviais.

Definição 8.2. Seja L uma álgebra de Lie e ϕ uma representação de L em V. Um *peso* de ϕ é um funcional linear $\lambda : L \longrightarrow K$ tal que o subespaço V_λ de V, definido por

$$V_\lambda = \{v \in V; \forall\, X \in L, \exists\, n \geq 1, (\phi(X) - \lambda(X))^n v = 0\},$$

satisfaz $V_\lambda \neq 0$. O subespaço V_λ é chamado de *subespaço de peso* associado a λ. A dimensão de V_λ é chamada de *multiplicidade* de λ.

Definição 8.3. Seja L uma álgebra de Lie. Uma *subálgebra de Cartan* de L é uma subálgebra $C \subset L$ que satisfaz:
(a) C é nilpotente,
(b) O normalizador de C em L coincide com C.

Exemplo 8.1. Para $L = gl(2)$,

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} ; a \in K \right\}$$

é uma subálgebra de Cartan de L.

Definição 8.4. Os pesos não-nulos da representação adjunta em L de uma subálgebra de Cartan C são denominados *raízes.*

O conjunto das raízes de uma subálgebra de Cartan C é denotado por Π. Verifica-se que Π gera o dual C^* da álgebra C.

Notação: Π^+ denota o conjunto das raízes positivas e Π^- o conjunto das raízes negativas.

A importância das representações de $sl(2)$ se justifica pelo fato de que, em álgebras semissimples sobre corpos algebricamente fechados a toda raiz da representação de uma subálgebra de Cartan está associada uma subálgebra de dimensão 3 isomorfa a $sl(V)$.

Teorema 8.1. (Teorema de Decomposição de Weyl) Seja L uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita e ϕ uma representação de L em V. Então, ϕ é completamente irredutível, isto é, V se decompõe como $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, com cada V_i invariante e irredutível.

Veja a demonstração em [San, pg 137].

Como $sl(V)$ é simples, o Teorema 7.1 permite reconstruir suas representações de dimensões finitas a partir daquelas que são irredutíveis.

Seja ϕ uma representação irredutível de dimensão finita de $sl(2)$ em V. Suponha que $v \in V$ é um autovetor de $\phi(H)$ associado ao autovalor λ. Considere a base $\{X, H, Y\}$ de $sl(2)$, onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os colchetes entre os elementos dessa base são

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [H, X] = H.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\phi(H)\phi(X)v &= \phi[H, X]v + \phi(X)\phi(X)v \\
&= \phi[H, X]v + \phi(X)\lambda v \\
&= \phi(2X)v + \phi(X)\lambda v \\
&= (\lambda + 2)\phi(X)v
\end{aligned}$$

e, portanto, $\phi(X)v$ é um autovalor de $\phi(H)$ associado ao autovalor $\lambda+2$ se $\phi(X)v \neq 0$. De maneira simétrica, se $\phi(Y)v \neq 0$, Y é um autovalor de $\phi(H)$ associado ao autovalor $\lambda - 2$. Analogamente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\phi(H)\phi(X)^k v &= (\lambda + 2)\phi(X)v \\
\phi(H)\phi(Y)^k v &= (\lambda - 2)\phi(Y)v.
\end{aligned}$$

Assim, iterações das ações de $\phi(X)$ dão origem a autovetores de $\phi(H)$ associados a autovalores em ordem crescente, o mesmo ocorrendo com $\phi(Y)$, mas neste caso, com autovetores associados a autovalores em ordem decrescente.

Obteremos agora uma caracterização das representações irredutíveis de $sl(2)$.

Teorema 8.2. Seja ϕ uma representação irredutível de $sl(2)$ em V com $\dim V = n + 1$. Então, existe uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que para $i = 0, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\phi(X)v_i &= i(n - i + 1)v_{i-1} \\
\phi(X)v_i &= (n - 2i)v_i \\
\phi(X)v_i &= v_{i+1},
\end{aligned}$$

onde $v_{-1} = v_{n+1} = 0$. Essas expressões mostram que, em relação à base dada, $\phi(X)$ é triangular superior, $\phi(H)$ é diagonal (com autovalores inteiros) e $\phi(Y)$ é triangular inferior.

Veja a demonstração em [San, pg 148].

A partir do teorema anterior, obtemos a seguinte classificação das representações irredutíveis de $sl(2)$.

Teorema 8.3. Para cada $n \geq 0$ existe uma única (a menos de isomorfismos) representação irredutível de dimensão $n + 1$ de $sl(2)$ e essas representações cobrem todas as representações de dimensão finita.

Veja a demonstração em [San, pg 150].

9 Representações de Álgebras Semissimples

Definição 9.1. Uma raiz $\alpha \in \Pi$ é *simples* se:
(a) $\alpha > 0$;
(b) não existem $\beta, \gamma \in \Pi$ tais que β e γ são positivas e $\alpha = \beta + \gamma$.

O conjunto das raízes simples será denotado por Σ.

Definição 9.2. Um *sistema simples de raízes* é um subconjunto $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, satisfazendo
(a) Σ é uma base de $C^*_{\mathbb{Q}}$;
(b) toda raiz β pode ser escrita como $\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$, com coeficientes inteiros e todos de mesmo sinal.

Definição 9.3. A forma de Cartan-Killing define uma aplicação $C \to C^*$ por $H \longmapsto \alpha_H(\cdot) = \mathrm{Tr}(H, \cdot)$. Como a restrição da forma de Cartan-Killing a C é não-degenerada, essa aplicação é um isomorfismo entre C e C^*. Para $\alpha \in C^*$ sua imagem pela inversa desse isomorfismo será denotada por H_α, isto é, H_α é definido pela igualdade $\mathrm{Tr}(H_\alpha, H) = \alpha(H)$.

Para $\alpha \in \Pi, H_\alpha$ é o seu dual pela forma de Cartan-Killing, enquanto que $H'_\alpha = \frac{2}{\mathrm{Tr}(\alpha,\alpha)} H_\alpha$ denota o normalizado desse dual.

Definição 9.4. Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Um *sistema fundamental de pesos* Φ é o dual da base formada por H'_{α_i}.

Definição 9.5. As representações associadas aos elementos de Φ são chamadas de *representações fundamentais*.

Seja $\alpha_i : L \to K$ um funcional linear e $L_{\alpha_i} = \{l \in L; \forall\, X \in L, \exists\, n \geq 1, (ad(X) - \alpha_i(X))^n l = 0\}$ tal que $L_{\alpha_i} \neq 0$. Considere a subálgebra $\eta^+ = \sum\limits_{\alpha \in \Pi} L_\alpha$. Temos a seguinte definição.

Definição 9.6.
(a) Um peso λ é um *peso máximo* se $\eta^+ V_\lambda = 0$.
(b) Um vetor $v \in V, v \neq 0$ é um *elemento primitivo* com peso λ se $v \in V_\lambda$ e λ é um peso máximo.

Exemplo 9.1. Considere a álgebra $sl(l+1)$ e a subálgebra de Cartan C das matrizes diagonais de traço zero. As raízes são dadas por $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j, i \neq j$, onde

$$\lambda_i : \text{diag}\,\{a_1, \ldots, a_{l+1}\} \to a_i.$$

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{l,l+1}\}$$

e, como o dual de uma raiz é dado por $H_{\alpha_{ij}} = \frac{1}{2(l+1)} E_{ii} - E_{jj}$, os duais normalizados $H_i = \frac{2}{\mathrm{Tr}(\alpha_i,\alpha_i)} H_{\alpha_i}$ das raízes simples formam a base $\{E_{11} - E_{22}, \ldots, E_{ll} - E_{l+1,l+1}\}$ de C. O sistema fundamental de pesos é a base dual dessa base. Em termos dos funcionais λ_i, temos

$$\Phi = \{\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \ldots, \lambda_1 + \ldots + \lambda_l\}.$$

Agora sejam $V = K^{l+1}$ e $\{e_1, \ldots, e_{l+1}\}$ a base canônica de V. A representação de $sl(l+1)$ em V é irredutível e e_1 é um elemento primitivo de peso máximo λ_1. Portanto essa é a representação fundamental associada ao peso λ_1. As demais representações são obtidas nos produtos exteriores

$$\Lambda^k V, \quad k = 2, \dots, l$$

em que $sl(l+1)$ se representa por

$$X(u_1 \Lambda \cdots \Lambda u_k) = X u_1 \Lambda \cdots \Lambda u_k + \cdots + u_1 \Lambda \cdots \Lambda X_k.$$

O conjunto formado por

$$e_{i_1} \Lambda \cdots \Lambda e_{i_k}, \qquad i_1 < \cdots < i_k$$

é uma base de $\Lambda^k V$ e os subespaços gerados pelos elementos dessa base são subespaços de pesos associados aos pesos

$$\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}, \qquad i_1 < \cdots < i_k.$$

O primeiro elemento da base $v = e_1 \Lambda \cdots \Lambda e_k$ é um elemento primitivo de peso $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Demonstra-se que a representação é irredutível, veja [San, pg 307]. Portanto, essa representação é a representação fundamental de $sl(2)$ com peso máximo $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

10 Referências Bibliográficas

[Bur] W. Burnside, **Theory of Groups**, 2.ed. edition, Dover, New Yok, 1955.

[Fri] B. Fritzche, **Sophus Lie: a sketch of his life and work**. J. of Lie Theory, **9** (1999), $1-38$.

[Her] I. N. Herstein, **Topics in algebra**. 2.ed., New York, J. Wiley & Sons, 1995.

[Hof] K. Hoffman, R. Kunze, **Álgebra linear**. 2.ed., Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1979.

[Hum] J. E. Humphreys, **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. New York, Springer-Verlag, 1972.

[Jac] N. JACOBSON, **Lie algebras**. New York, Interscience, 1962.

[Rob] D. J. S. Robinson, **A Course in the Theory of Groups**, 2.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.

[Rot] J. J. Rotman, **An Introduction to the Theory of Groups**, 4.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Sam] H. Samelson, **Notes on Lie algebras**. Van Nostrand Mathematical Studies, **23**, 1969.

[San] L. A. B. San Martin, **Álgebras de Lie**. Campinas, Editora da Unicamp, 1999.

[Sil] J. C. Silva, **Álgebras de Lie de Derivações Livres de Constantes**, Universidade de Brasília, Dissertação de Mestrado, 2004.