Variedades Riemannianas Bidimensionais

Carlos Eduardo Rosado de Barros, Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás,
Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.
E-mail: carlos-eduardo-rosado-de-barros@hotmail.com;
romildo@mat.ufg.br

Objetivos : Nosso objetivo neste trabalho é estudar variedades Riemanninas bidimensionais.Apresentaremos alguns resultados de Geometria Riemanniana, definiremos superfície abstrata, superfície geométrica, vetor tangente, superfície completa, entre outras coisas.

1 Superfície Abstrata

.

O maior defeito da definição de superfície regular é a sua dependência em relação a R^3. A idéia natural que se tem de uma superfície é a de um conjunto que seja, de certo modo, um conjunto bi-dimensional e ao qual se possa aplicar o cálculo diferencial de R^2. A presença desnecessária de R^3 é uma imposição de nossa natureza física. Apesar da necessidade de uma idéia de superfície abstrata já ter sido percebida desde Gauss, foi nescessário quase um século até que atingisse a forma definitiva apresentada neste trabalho. Um estímulo importante foi a aplicação dos métodos da Geometria Riemanniana à Teoria da Relatividade.

Definição 1.1 Uma superfície abstrata (variedade diferenciável de dimensão 2) é um conjunto S munido de uma família de aplicações bijetoras $x_\alpha : U_\alpha \to S$ de conjuntos $U_\alpha \subset R^2$ em S tal que:
(1) $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = S$
(2)Para cada par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, temos que $x_\alpha^{-1}(W)$, $x_\beta^{-1}(W)$ são conjuntos abertos em R^2 , e $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$, $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são aplicações diferenciáveis.

Exemplo 1.1 O plano euclidiano com o sistema de coordenadas usual e a identidade é um exemplo de superfície abstrata.

Exemplo 1.2 O conjunto P^2 das retas de R^3 que passam pela origem é uma superfície abstrata. P^2 é chamado de plano projetivo real.

2 Superfície Geométrica

.

Para definir superfície geométrica precisamos associar um plano a cada ponto de uma superfície abstrata. Assim, precisamos definir o que é o vetor tangente de uma curva em uma superfície abstrata.

Definição 2.1 Uma aplicacção diferenciável $\alpha : (0, 1) \to S$ é chamada uma curva em S. Suponhamos que $\alpha(0) = p$ e seja D o conjunto das funções em S que são diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : D \to R$ dada por

$$\alpha'(0)(f) = f \in D$$

. Um vetor tangente em um ponto $p \in S$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \to S$ com $\alpha(0) = p$.

Segue-se do que foi visto acima, que o conjunto dos vetores tangentes em p, com as operações usuais para funções, é um espaço vetorial bidimensional T_pS chamado de espaço tangente de S em p. Também temos que a escolha de uma parametrização $X : U \to S$ em torno de p determina uma base $\{(\partial/\partial u)_p, (\partial/\partial v)_p\}$ de T_pS para todo $p \in X(U)$.

Definição 2.2 Uma superfície geométrica (Variedade Riemanniana de dimensão 2) é uma superfície abstrata S munida de uma escolha de um produto interno $< \, , \, >_p$ em cada T_pS, $p \in S$, que varia diferencialmente com p no seguinte sentido. Para alguma (logo para todas) parametrização $X : U \to S$ em torno de p, as funções :

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, F(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, G(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

são funções diferenciáveis em U. O produto interno $< \, , \, >$ é frequentemente chamado de uma métrica (Riemanniana) em S.

Exemplo 2.1 O espaço euclidiano bidimensional $S = R^2$ com o produto interno usual é um exemplo de superfície geométrica.

Exemplo 2.2 Seja $S = R^2$ um plano com coordenadas (u, v) e defina o produto interno em cada ponto $p = (u, v) \in R^2$ colocando

$$E(u, v) = 1, F(u, v) = 0, G(u, v) = e^{2u}.$$

S munida desse produto interno é uma superfície geométrica H, chamada de Plano Hiperbólico.

Exemplo 2.3 Também $S = R^2$ com coordenadas (u, v) munida em cada ponto $p = (u, v)$ do produto interno

$$E(u, v) = e^{-(u^2+v^2)}, F(u, v) = 0, G(u, v) = e^{-(u^2+v^2)}.$$

é uma superfície geométrica.

3 Superfície Completa

.

Definição 3.1 Uma superície regular (conexa) S é chamada estendível se existe uma superfície regular (conexa) $\overline{S}$ tal que $S \subset \overline{S}$ como um subconjunto próprio. Se não existe tal $\overline{S}$, S é dita não-estendível.

Definição 3.2 Uma superície regular S é denominada completa quando, para qualquer ponto $p \epsilon S$, qualquer geodésica parametrizada, $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ de S, começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\overline{\gamma} : R \rightarrow S$, definida sobre toda reta real R.

O Teorema de Hopf-Rinow afirma que em uma superfície completa S sempre existe uma geodésica minimizante ligando dois pontos $p, q \epsilon S$ dados.

Exemplo 3.1 Pode-se provar que o plano Hiperbólico H é completo.

Exemplo 3.2 O cone de uma folha sem o vértice dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \epsilon R^2$$

é uma superfície regular S não completa, pois as geratrizes não podem ser estendidas para todo valor do comprimento de arco sem atingir o vértice.

Exemplo 3.3 A superfície do exemplo 2.3 é completa. Para justificar isto usaremos o seguinte resultado

Teorema 3.1 Sejam S e $\overline{S}$ superfícies regulares e seja $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$ um difeomorfismo. Suponha que $\overline{S}$ seja completa e que exista uma constante $c > 0$ tal que $I_p(v) \geq c\overline{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v))$ para todo $p \in S$ e todo $v \in T_pS$, onde I e $\overline{I}$ denotam as primeiras formas fundamentais de S e $\overline{S}$, respectivamente. Nessa condições, S é completa.

Condideremos então $\overline{S} = R^2$ o plano euclidiano com coordenadas (x, y) e produto interno usual, $S = R^2$ com $E = e^{-(u^2+v^2)}, F = 0, G = e^{-(u^2+v^2)}$ e o difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \overline{S}, \varphi(p) = p$ dado pela identidade.

$$\overline{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)) = \overline{I}_p(v) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2 + y^2) \leq (x^2 + y^2) = I_p(v)$$

Logo, pelo teorema 3.1, S é completa.

4 Teorema Egregium de Gauss

.

O teorema de Gauss é considerado, pela extensão de suas consequências, um dos fatos mais importantes da geometria diferencial.

Teorema 4.1 A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais, ou seja, depende apenas da primeira forma fundamental.

É um fato extraordinário que um conceito como a curvatura Gaussiana, cuja definição usa de maneira essencial a posição da superfície no espaço, não dependa desta posição mas apenas da estrutura métrica (primeira forma fundamental) da superfície.

Exemplo 4.1 A curvatura da superfície do exemplo 2.3 é

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}[(\frac{E_v}{\sqrt{EG}})_v + (\frac{G_u}{\sqrt{EG}})_u] = \frac{-e^{(u^2+v^2)}}{2}[(-2v)_v + (-2u)_u] = 2e^{(u^2+v^2)}$$

Exemplo 4.1 A geometria do plano Hiperbólico H é diferente da geometria usual de R^2. A curvatura de H é

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}[(\frac{E_v}{\sqrt{EG}})_v + (\frac{G_u}{\sqrt{EG}})_u] = -\frac{1}{2e^u}(\frac{2e^{2u}}{e^u})_u = -1$$

Em verdade, o plano hiperbólico é um modelo exato para a geometria não euclidiana de Lobatchevski, na qual todos os axiomas de Euclides, exeto o axioma das paralelas são válidos. Levanta-se uma questão se uma tal superfície pode ou não ser encontrada com uma superfíficie regular de R^3. O contexto natural para essa questão é a seguinte definição.

Definição 4.2 Uma aplicação diferenciável $\varphi : S \to R^3$ de uma superfície abstrata S em R^3 é uma imersão se a diferencial $d\varphi_p : T_pS \to T_{\varphi(p)}R^3$ é injetiva. Se, além disso, S tiver uma métrica $< \, , \, >$ e

$$< d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) >_{\varphi(p)} = < v, w >_p, \;\; v, w \in T_pS,$$

dizemos que φ é uma imersão isométrica.

Isto significa que, para uma imersão isométrica, a métrica "induzida" pelo R^3 sobre S coincide com a métrica dada por S.

5 Teorema de Hilbert

.

Teorema 5.1 Uma superfície geométrica completa S com curvatura constante negativa não pode ser imersa isometricamente em R^3.

Portanto, o teorema de Hilbert, afirma que não existe uma imersão isométrica em R^3 de todo o plano hiperbólico. Em particular, não se pode encontrar um modelo da geometria de Lobatchevski com uma superfície regular em R^3. Não precisamos no restringir ao R^3. A definição acima faz sentido se trocarmos R^3 por um R^n arbitrário. Portanto, podemos perguntar para quais valores de n existe uma imersão isométrica de todo plano hiperbólico em R^n. O teorema de Hilbert afirma que $n \geq 4$ e caso n=4 ainda está em aberto. Assim, a introdução de superfícies abstratas nos traz novos objetos e lança uma nova luz sobre questões importantes.

Referências

[C1] Carmo, M. P. do - Differential Geometry of Curves end Surfaces, Prentice-Hall, 1976.

[K] kulnel, W., Differential Geometry, Curves - Surfaces - Manifolds, Translated from the 1999 german original by bruce Hunt. Student Mathematical library, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, (2002).

[PT2] Pina, R. , Tenenblat, K. , On metrics satisfying equation $R_{ij} - Kg_{ij}/2 = T_{ij}$ for constant tensors T, Journal of geometry and Physics 40(2002), 379-383.

[PT3] Pina, R. , Tenenblat, K. , Conformal Metrics and Ricci Tensorson the Sphere, Proc. Amer. Math. Soc. V. 132 P. 3715-3724, 2004.

[PT4] Pina, R., tenenblat, K. , On the Ricci and Einstein equations on the pseudo-Euclidean and hiperbolic spaces, Differential Geometry and its Applications Vol. 24 101-107.

[S] Sottomayor, J. - Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Projeto Euclides.

[T] Tenenblat, K. - Introdução à Geometria Diferencial, Editora UNB, Brasilia, 1988.

[C2] Carmo, M. P. do - Geometria Riemanniana, IMPA, Projeto Euclides.

[AC] Tenenblat, K. - Acogeo Versão 3.0, Brasília, 2006