

ANÁLISE DE VIGAS ATRAVÉS DO MEC CONSIDERANDO-SE DOIS TIPOS DE ANÁLISE: AS VIGAS ISOLADAS E O PAVIMENTO DE EDIFÍCIO COMO UM TODO

Philippe Barbosa Silva¹, Gabriela Rezende Fernandes²

1. Graduando em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás – *Campus* Catalão
(philippe1303@hotmail.com)

2. Professora Doutora da Universidade Federal de Goiás – *Campus* Catalão
(gabrielar.fernandes@gmail.com)

PALAVRAS-CHAVE: MEC, pavimento, flexão de placas.

1. INTRODUÇÃO

Comumente em problemas de engenharia depara-se com a complexidade na geometria do sólido ou na constituição de materiais cujas leis constitutivas são bastante complexas. De tal forma, torna-se inviável e às vezes inexecutável a determinação da solução exata, fazendo-se então necessária a obtenção de soluções aproximadas por meio de métodos numéricos, nos quais faz-se uso de simplificações nas leis constitutivas dos materiais e na geometria do sólido. Nesse contexto, o método dos elementos de contorno (MEC) provou ser um instrumento adequado para lidar com problemas numéricos de flexão de placa. Esse método dispensa a obrigatoriedade de discretização do domínio da estrutura analisada, para análise linear, necessitando somente da discretização do contorno. Tal fato torna a malha da estrutura mais simplificada e facilita possíveis intervenções, reduzindo ainda o tempo de processamento de cálculo. Tal método é aconselhado para diversos problemas em engenharia, no entanto ele é mais indicado em casos de concentração de tensão (ou outro tipo de variável), tais como os que ocorrem na consideração de pilares em pavimentos. De modo recente Fernandes e Venturini (2002) e (2005) propuseram dois modelos numéricos para a realização de análise de flexão de placas enrijecidas por vigas utilizando apenas uma formulação do MEC com base na Hipótese de Kirchhoff. Neste trabalho, a formulação apresentada por Fernandes e Venturini (2002) é estendida para o caso de inclusão de pilares no domínio da placa enrijecida.

O método dos elementos de contorno apresenta um bom desempenho para a análise de placas. A precisão que mostra é ainda mais notada em pontos de concentração de esforços. Assim, o método se apresenta com uma característica importante para a determinação de

esforços em estruturas de pavimentos de edifícios, que usualmente apresentam diversos carregamentos em áreas de pequenas dimensões, como os pilares. Note-se que as representações integrais de momentos e forças cortantes são exatas; o erro introduzido é devido à aproximação dos valores de contorno.

O presente estudo objetiva de maneira principal a análise de pavimento de edifícios sujeitos a flexão simples através de código computacional baseado no Método dos Elementos de Contorno (MEC). Apresentam-se ainda como objetivos específicos a análise isolada dos elementos constituintes do pavimento de um edifício e sua análise conjunta, possibilitando fins comparativos. Além disso, a formulação do MEC é utilizada na análise de vigas contínuas, cujos resultados numéricos são comparados com os obtidos por meio do *software* Ftool, baseado no Método dos Deslocamentos, que é de fácil utilização.

2. EQUAÇÕES BÁSICAS

A priori deve-se ter como base a Teoria de Placas Delgadas, a qual se adéqua à resolução do problema proposto. Neste trabalho adotam-se como válidas as Hipóteses de Kirchhoff. No problema de placas, as equações de equilíbrio em termos das forças internas são dadas por:

$$q_{i,i} + g = 0 \quad (i = 1,2) \quad (1)$$

$$m_{ij,i} - q_j = 0 \quad (i, j = 1,2) \quad (2)$$

onde g é o carregamento distribuído ao qual a placa está submetida, m_{ij} são os momentos fletor e torçor e por fim, q_i representa a atuação de uma força cisalhante.

É interessante ainda, definir-se a equação diferencial de placa sujeita à flexão:

$$w_{,ijij} = \frac{g}{D} \quad (i, j = 1,2) \quad (3)$$

donde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ representa a rigidez à flexão da placa. A equação (3) pode ser expressa explicitamente da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{g}{D} \quad (4)$$

Os esforços internos podem ser escritos em função dos deslocamentos através das seguintes expressões:

$$m_{ij} = -D \left[\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (5)$$

$$q_i = m_{ij, j} = -D w_{,jji} \quad (6)$$

Na teoria clássica de Kirchhoff, o esforço cortante é agrupado com o momento volvente, resultando no esforço cortante equivalente, que é definido como:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \quad (7)$$

onde (n, s) constitui um sistema particular de coordenadas, com n e s definidos como as direções normal e tangencial ao contorno da placa, respectivamente.

Complementarmente, para finalizar, define-se as condições de contorno da placa, prescrevendo-se valor de cada variável nodal dos pares de deslocamentos (w e $w_{,n}$) e esforços (V_n e M_n).

3. EQUAÇÕES INTEGRAIS

De posse de relações e condições supracitadas, tem-se que as equações integrais para o caso geral de problemas de placa são obtidas por meio da aplicação do Teorema de Reciprocidade de Betti, expresso da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (8)$$

onde m_{ij} e $w_{,ij}$ referem-se ao problema de flexão de placa, enquanto que m_{ij}^* e $w_{,ij}^*$ referem-se ao problema fundamental.

Integrando-se a equação (8) por partes duas vezes e realizando as substituições cabíveis, chega-se à seguinte equação integral:

$$\begin{aligned} K(q)w(q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(q, P)w(P) - M_{nn}^*(q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P)w_{ci}(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(q, P) - M_{nn}(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(q, P) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_s} (g(p)w^*(q, p))d\Omega_s(p) \quad (9)$$

sendo $K(q)$ uma constante denominada termo livre, dotada de valor unitário ($K(q)=1$) caso se trate de ponto de colocação q interno e $K(q)=0,5$ em se tratando de ponto q sobre o contorno; w_c é o deslocamento transversal do canto da placa, M_n o momento fletor, g o carregamento externo transversal à superfície da placa e $w_{,n}$ a rotação.

O pavimento será modelado por uma placa em sub-regiões, onde cada sub-região representa uma viga ou uma laje, como está representado na figura (1) uma placa enrijecida com 2 vigas, onde t_s é a espessura da sub-região Ω_s . Na dedução da equação integral para um domínio composto por subdomínios (veja figura (1)), tem-se a equação (8) escrita da seguinte forma:

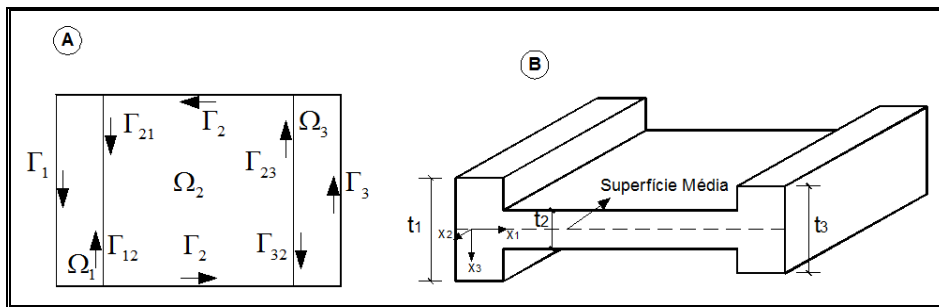


Figura 1 – Placa enrijecida com duas vigas

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (10)$$

onde N_s é o número de subregiões e D_s é a rigidez à flexão da subregião Ω_s , D é a rigidez à flexão da sub-região onde está o ponto de colocação, todas as expressões fundamentais são relativas à sub-região onde está o ponto de colocação.

A equação (10) é escrita em função dos valores da sub-região onde está o ponto de colocação, afim de facilitar o cálculo, pois desse modo, após a integração por partes, as forças de superfície são eliminadas das interfaces, reduzindo com isso, o número de variáveis do problema. Similarmente ao desenvolvido anteriormente, integrando-se por partes 2 vezes,

obtém-se a equação integral abaixo, válida para um caso genérico que contemple N_s sub-regiões.

$$\begin{aligned}
 K(q)w(q) = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w_{,n}(P)M_n^*(q,P) - w(P)V_n^*(q,P))d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{mi}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n}(P)M_n^*(q,P) - w(P)V_n^*(q,P))d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(q,P)w_{ci}(P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(q,P))d\Omega_g \\
 & - \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_c^*(q,P)_{\Omega_j} w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_c(P)w_{ci}^*(q,P)
 \end{aligned} \tag{11}$$

sendo N_c o número de cantos, D_b a rigidez da viga e D_a a rigidez da sub-região adjacente à viga; c_1 , c_2 e c_3 são tipos de canto: o c_3 envolve apenas uma sub-região, c_2 é definido sobre o contorno externo entre duas sub-regiões e o canto c_1 é definido no interior da placa, entre três sub-regiões (vide figura (2)); $K(q)$ é uma constante que é função do posicionamento do ponto de colocação q .

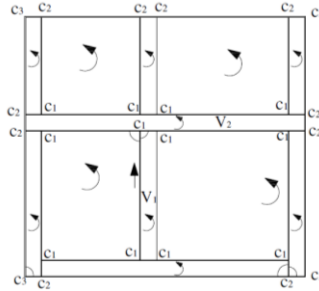


Figura 2 – Tipos de cantos em placa com sub-regiões.

Abaixo estão expressos os valores de $K(q)$.

Tabela 3.1 – Valores de $K(q)$ em função da posição de q .

VALOR DE $K(q)$	POSIÇÃO DE q
$K(q) = 1/2$	q no contorno externo
$K(q) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_{pa}}{D_j} \right)$	q na interface; ponto em Γ_j da figura (3.3)

$K(q) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) + \frac{1}{2} \frac{D_2}{D} + \frac{D_3}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)$	q do tipo c_1 , para $D(q) = D = D_{laje}$, β é definido na laje e γ na viga (interrompida) de rigidez D_3
$K(q) = \frac{\beta}{2\pi} + \frac{D_{pa}}{D_j} \frac{\gamma}{2\pi}$	q do tipo c_2 , para $D(q) = D_j$ (D_j e D_{pa} são, respectivamente, as rigidezes da placa onde se definem β e γ)
$K(q) = \beta/2\pi$	q do tipo c_3

Para a inclusão de pilares na formulação do MEC para placas com sub-regiões, escreve-se os esforços de flexão que o pilar causa na placa em termos da tensão normal à seção transversal do pilar. Na equação integral da placa essa tensão normal será então considerada como carregamento transversal externo uniformemente distribuído no subdomínio da placa correspondente à seção transversal do pilar.

De tal maneira, considera-se os esforços (M_x^- , M_y^- e R) produzidos na interface placa-pilar em termos da tensão normal (σ^c) uniformemente distribuída sobre a seção transversal do pilar. Esquemáticamente, apresenta-se a seguir figuras demonstrativas dos esforços atuantes em tal situação, e em sequência se posta a expressão correspondente à σ^c .

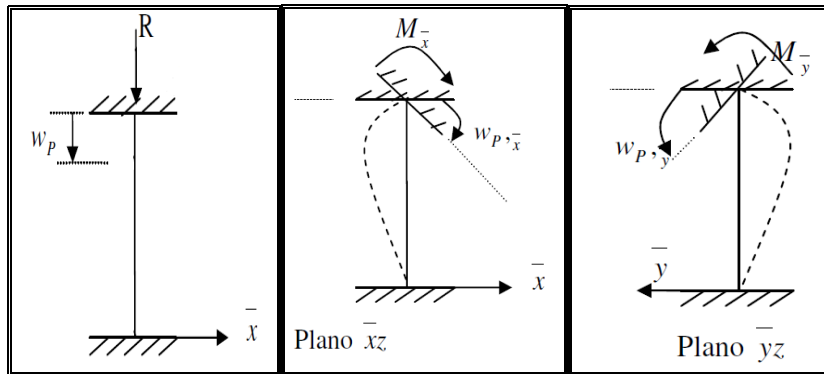


Figura 3 – Seção do pilar sujeita à ação de M_x^- , M_y^- e R

$$\sigma^c = -\frac{M_y^-}{I_x} \bar{y} - \frac{M_x^-}{I_y} \bar{x} - \frac{R}{A_c} \quad (12)$$

onde A_c é a área da seção transversal do pilar, I_x e I_y são os momentos de inércia em relação às direções principais \bar{x} e \bar{y} , respectivamente.

Valendo-se do uso da matriz de rigidez dos pilares, os esforços no pilar podem ser escritos em função dos seus deslocamentos como segue:

$$M_{\bar{y}} = (a_c E_c I_{\bar{x}} / L_c) (w_{,\bar{y}})_c \quad (13)$$

$$M_{\bar{x}} = (a_c E_c I_{\bar{y}} / L_c) (w_{,\bar{x}})_c \quad (14)$$

$$R = \frac{E_c A_c}{L_c} w_c \quad (15)$$

onde $a_c=3$ quando o pilar estiver apoiado na base e $a_c=4$ quando o pilar mantiver um vínculo de engaste na base; $(w_{,\bar{x}})_c$, $(w_{,\bar{y}})_c$ e w_c são os deslocamentos generalizados na seção transversal do pilar.

Por fim, substituindo-se (13) a (15) em (12), chega-se à:

$$\sigma^c = \left[-(a_c E_c / L_c) (w_{,\bar{x}})_c \right] \bar{x} + \left[-(a_c E_c / L_c) (w_{,\bar{y}})_c \right] \bar{y} - E_c w_c / L_c \quad (16)$$

Considerando-se agora σ^c como sendo uma carga distribuída adicional atuante sobre a área Ω_c da placa, que corresponde à seção transversal do pilar em contato com a placa, e tomando como verídica a hipótese de que a seção deformada permanece plana, os deslocamentos na interface placa-pilar são constantes, chegando-se então à seguinte equação para o problema de flexão:

$$\begin{aligned} K(q)w(q) = & - \sum_{m=1}^{N_{Sub}} \frac{D_m}{D} \int_{\Gamma_m} \left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma - \sum_{j=1}^{N_{c1}} \frac{D_j}{D} R_{cj}^* w_{cj} - \sum_{j=1}^{N_{c2}+N_{c3}} \left(\frac{D_j - D_a}{D} \right) R_{cj}^* w_{cj} \\ & + \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma - \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ba}} \left(\frac{D_b - D_a}{D} \right) \left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega + \sum_{j=1}^{N_c} R_{cj} w_{cj}^* + \\ & \left[\sum_{j=1}^{N_{col}} \left[\left(- \frac{a_j E_j}{L_j} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right)_j \right) \int_{\Omega_{ci}} \bar{x} w^* d\Omega_{cj} + \left(- \frac{a_j E_j}{L_j} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \right)_j \right) \int_{\Omega_{ci}} \bar{y} w^* d\Omega_{cj} - \frac{E_j}{L_j} w_j \int_{\Omega_{ci}} w^* d\Omega_{cj} \right] \right] \quad (17) \end{aligned}$$

onde L_{pi} refere-se ao comprimento pilar.

Fernandes (2003) propôs um Modelo Alternativo para análise linear de pavimento enrijecido, no qual adotando-se aproximações ao longo das larguras das vigas, as variáveis passam a ser definidas ao longo das linhas médias das vigas, ao invés das interfaces. Com essa diferenciação observa-se grande redução do grau de liberdade apresentado pelos

problemas e eliminam-se possíveis casos de singularidades que poderiam surgir quando as vigas tivessem larguras muito pequenas, já que nesse caso teriam pontos de colocação muito próximos. Para esclarecer melhor as aproximações realizadas, considere a viga B_3 representada pela sub-região Ω_3 , conforme a figura (4). Algumas hipóteses cinemáticas serão assumidas ao longo da largura das vigas. O vetor deslocamento relacionado às interfaces da viga é trasladado para a linha média da viga, como segue:

$$w^{\Gamma_{32}} = w + w_{,n} b_3 / 2 \quad k = n, s \quad (18a)$$

$$w^{\Gamma_{31}} = w - w_{,n} b_3 / 2 \quad k = n, s \quad (18b)$$

onde b_3 é a largura da viga, e $w^{\Gamma_{ij}}$ são componentes do deslocamento ao longo da interface Γ_{31} e Γ_{32} ; w e $w_{,n}$ são componentes ao longo da linha média.

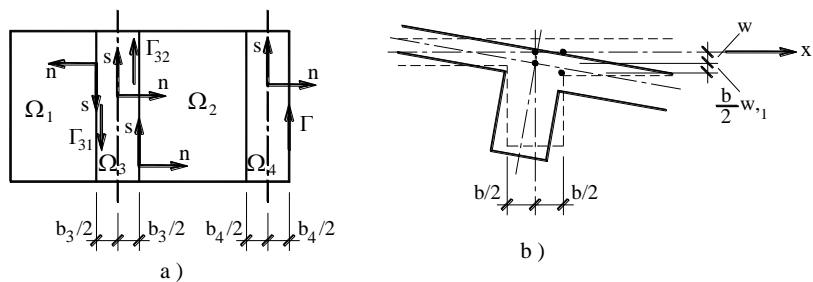


Figura 4 – (a) visão da placa enrijecida; (b) aproximação da deflexão ao longo das interfaces.

Cabe a ressalva de que apesar das variáveis serem definidas nos eixos, a integração numérica permanece sendo realizada ao longo do contorno da viga. Para escrever os deslocamentos sobre o contorno da viga em função dos seus valores no eixo, faz-se a adoção de que o deslocamento transversal w tem variação linear ao longo da viga e a rotação é considerada constante. Considerando-se essas aproximações, chega-se a uma nova equação do deslocamento transversal, w (equação (17)) escrita em função das variáveis sobre o contorno externo e eixos da viga. Derivando-se tal equação em relação à m chega-se à equação derivada do deslocamento transversal w , que também será utilizada na montagem do sistema de equações.

4. SISTEMA DE EQUAÇÕES

Até a dedução da equação integral (11) não se introduziu nenhuma aproximação. No entanto, para resolver as equações (11), (17) e a equação derivada do deslocamento transversal, deve-se fazer a aproximação do contorno em elementos retos ou curvos, e no

presente trabalho as variáveis definidas no elemento são aproximadas por funções quadráticas. Assim, posterior à discretização do contorno, realiza-se a transformação das equações integrais em equações algébricas através do uso de funções interpoladoras Φ , nas quais há quatro variáveis definidas em cada nó definido no contorno da placa sem vigas ou nos eixos das vigas, além das três novas incógnitas (w_p , $w_{p,\bar{x}}$ e $w_{p,\bar{y}}$) em cada interface placa-pilar. No centro dos pilares são escritas três equações, que serão aquelas correspondentes às equações desses deslocamentos incógnitos. Nos pontos sobre o contorno externo sem vigas e também sobre os eixos das vigas têm-se duas incógnitas por ponto, portanto, para a resolução do problema é necessário escrever duas equações. Para os pontos sobre o contorno externo são escritas duas equações de w , sendo uma para o ponto q sobre o contorno e outra para o ponto A (vide figura (5)). Para os pontos sobre os eixos das vigas são escritas uma equação do deslocamento transversal w e outra da derivada direcional de w . Nos cantos existe apenas uma incógnita e, por isto, é escrita para cada canto, uma equação de w .

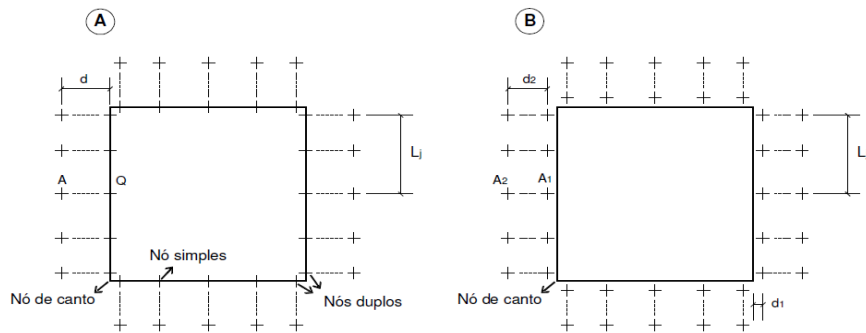


Figura 5 – Pontos de colocação

onde: $d_i = a_i l_m$

Sendo l_m a média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou se o nó for interno ao elemento, é igual ao comprimento do mesmo; $0,0001 \leq a_i \leq 1,5$ para evitar problemas numéricos e L_j o comprimento do elemento j .

Logo, escrevendo-se todas as equações necessárias à resolução do problema, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [H_F]_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_c \\ \{U_F\}_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_c \end{Bmatrix} + T(Q) \quad (19)$$

onde: w_c é o vetor dos deslocamentos nos cantos; R_c é o vetor das reações nos cantos; U_F contém os valores nodais dos deslocamentos do contorno externo sem vigas e dos eixos das vigas e por extensão conceitual, $[U_F]_P$ refere-se aos valores na interface placa-pilar; P_F é o vetor dos valores nodais dos esforços no contorno externo sem vigas e nos eixos das vigas externas; H_F contém valores obtidos da integração dos esforços fundamentais ao longo do contorno externo e interfaces, analogamente $[H_F]_P$ refere-se aos valores na interface placa-pilar; G_F contém valores obtidos a partir da integração das funções w^* e $w_{,n}^*$, ou suas derivadas, ao longo do contorno externo ou eixos de vigas externas; H_c e G_c refere-se ao vetor com valores dos esforços fundamentais, ou sua derivada, nos cantos e ao vetor que contém os termos referentes ao cálculo de w^* ou sua derivada nos cantos, respectivamente.

Sendo N o número de nós da discretização, além das três equações de deslocamentos no centróide do pilar deve-se escrever $2N+N_c$ equações para montar o sistema de equações (19), a partir do qual se obtém as incógnitas do problema e que na forma simplificada é dado por:

$$HU = GP + T \quad (20)$$

onde U contém os valores nodais da flecha e rotação, ao longo do contorno externo sem vigas, eixos de vigas e nos pontos centrais dos pilares, além dos deslocamentos nos cantos; P contém os valores das forças de superfície nos nós do contorno e eixos de vigas externas e cantos e T é o vetor independente devido às cargas aplicadas.

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir serão apresentados alguns exemplos numéricos de aplicação da formulação estudada neste trabalho. Inicialmente apresenta-se uma viga contínua cujos resultados são comparados com o Ftool. Em seguida os esforços e deslocamentos de uma viga pertencente a uma placa enrijecida são obtidos considerando-se duas diferentes análises: na primeira o pavimento é considerado como um todo e na segunda, as lajes e vigas são analisadas separadamente. Os exemplos foram executados a partir de programas na linguagem FORTRAN desenvolvidos pela Profa. Dra. Gabriela Rezende Fernandes, orientadora desse projeto.

5.1 VIGA APOIADA POR TRÊS PILARES

Considera-se uma viga apoiada por três pilares, dois em suas extremidades e um no centro da viga, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, $q=20 \text{ kN/m}$ (na placa considera-se o carregamento $q=100 \text{ kN/m}^2$ e largura da placa de 1m , multiplicando-se os valores obtidos para os esforços por $0,2$). No que concerne à geometria, tal viga é definida por: 7 m de comprimento e seção transversal de $h=10 \text{ cm}$ e $b=20 \text{ cm}$. As dimensões dos pilares são de $x=30 \text{ cm}$ e $y=20 \text{ cm}$ (na placa considera-se $x=30 \text{ cm}$ e $y=100 \text{ cm}$). Fez-se a adoção de coeficiente de Poisson nulo, possibilitando uma comparação coerente entre os resultados. Realizou-se duas análises, uma por meio do *software* Ftool (vide figura 7) e outra mediante formulação do MEC, cuja discretização de 96 elementos e 196 nós encontra-se na figura 5. Abaixo segue as comparações dos deslocamentos e momentos fletores obtidos pelos dois métodos.

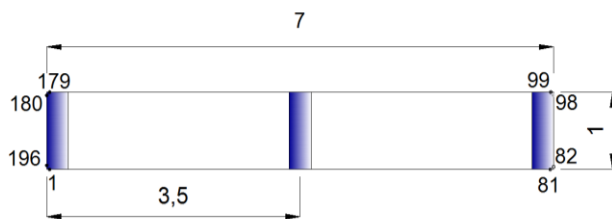


Figura 6 – Contorno discretizado com o MEC, medidas em m

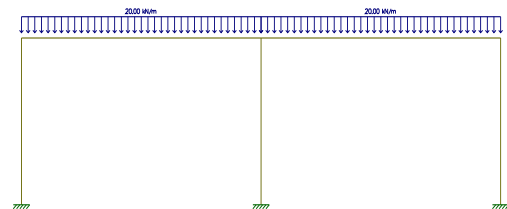


Figura 7 – Esquema gerado pelo Ftool

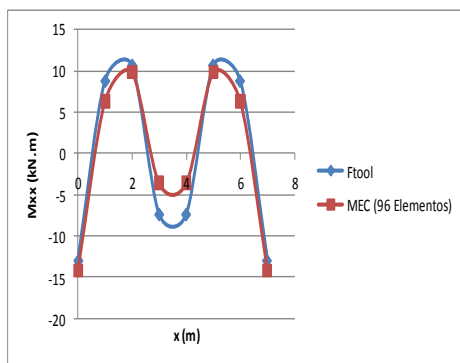


Figura 8 – Momentos fletores – Ftool x MEC

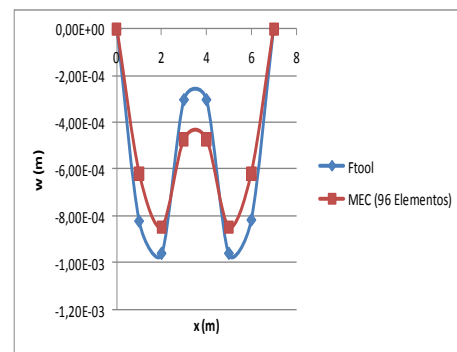


Figura 9 – Deslocamentos – Ftool x MEC

Com fins comparativos, realizou-se também a mesma simulação através da formulação do MEC com coeficiente de Poisson, $\nu=0,2$. Os resultados obtidos foram praticamente idênticos, demonstrando que para sistemas estruturais simples é admissível a consideração de coeficiente de Poisson nulo.

5.2 PLACA ENRIJECIDA COM CINCO VIGAS

Este exemplo é composto por uma placa, enrijecida com quatro vigas externas e uma viga interna, além de quatro pilares nos cantos extremos. As dimensões adotadas para a placa estão dispostas conforme a figura (10). Para a análise da placa foi adotado um carregamento de $q=20 \text{ kN/m}^2$ e admitiu-se um módulo de elasticidade com valor de $E=250000000 \text{ kN/m}^2$. Foi adotado também um coeficiente de Poisson de $\nu = 0,2$ tanto para a placa como para as vigas. Para este caso, adotou-se a espessura da laje $t_L = 0,20 \text{ m}$ e a espessura t_V das vigas V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5 como sendo iguais e de valor 20cm.

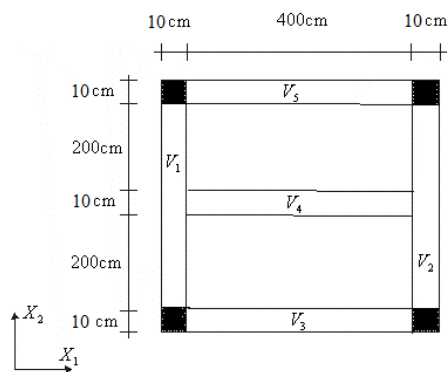


Figura 10 – Placa enrijecida com quatro vigas externas e uma viga interna

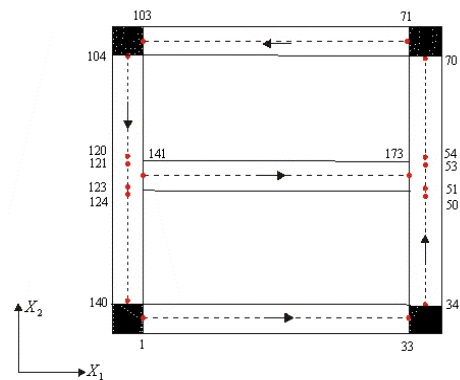


Figura 11 – Discretização do contorno e interfaces em 82 elementos

Fez-se adoção de discretização de três malhas para este exemplo. A primeira discretização dispõe de um total de 53 nós resultando em 22 elementos, posteriormente discretizou-se em 93 nós que representam 42 elementos e por fim, o pavimento foi discretizado em 173 nós que totalizam 82 elementos. Com essas três malhas o modelo apresentou convergência. Acima, na figura (11), está disposta a malha mais refinada do exemplo.

Vale salientar que este exemplo foi solucionado de duas maneiras distintas, para que possibilitasse fins comparativos. Primeiro realizou-se uma análise total do pavimento, baseando-se na teoria disposta anteriormente no corpo do presente trabalho, e executou-se outra análise isolada dos elementos estruturais constituintes do pavimento. Na análise como um todo, considerou-se o pavimento apoiado nos cantos extremos e nos nós de interface entre a viga interna e as vigas V_1 e V_2 , possibilitando comparações com a viga externa V_3 isolada e com dois pilares definidos. Já para a comparação com a viga interna de maneira isolada, considerou-se o pavimento apoiado nos nós de interface entre a viga interna e as vigas V_1 e V_2 e nos nós gerados nos pilares (nós 34, 70, 104 e 140 da malha da figura (11)). Na análise da placa isolada fez-se uso de um código computacional baseado nas Hipóteses de Reissner para

flexão de placas, que tem como valor de contorno o esforço cortante Q_n e não o esforço cortante equivalente, calculando, portanto de forma mais precisa o reação da laje na viga.

Analisou-se primeiramente cada uma das placas (lajes) constituintes do pavimento isoladamente, considerando-se três lados apoiados e o lado comum às duas lajes engastado. Desse modo, descobriu-se a reação em cada lado da placa. No caso da viga externa V_3 , descobriu-se Q_n igual a 12,5 kN/m; ao descarregar essa reação na referida viga, dividiu-se o valor de Q_n pela largura da viga, $b=0,1$ m, obtendo-se um carregamento de 125 kN/m² distribuído na superfície da viga. Similarmente, para a viga interna, houve o descarregamento de ambas as lajes, haja vista que tal viga está em contato com essas, o que resultou num $Q_n = 42,5$ kN/m, culminando em um carregamento de 425 kN/m² distribuído sobre a superfície da viga interna. Segue abaixo uma figura que mostra as dimensões e condições de apoio da laje e viga analisadas isoladamente.

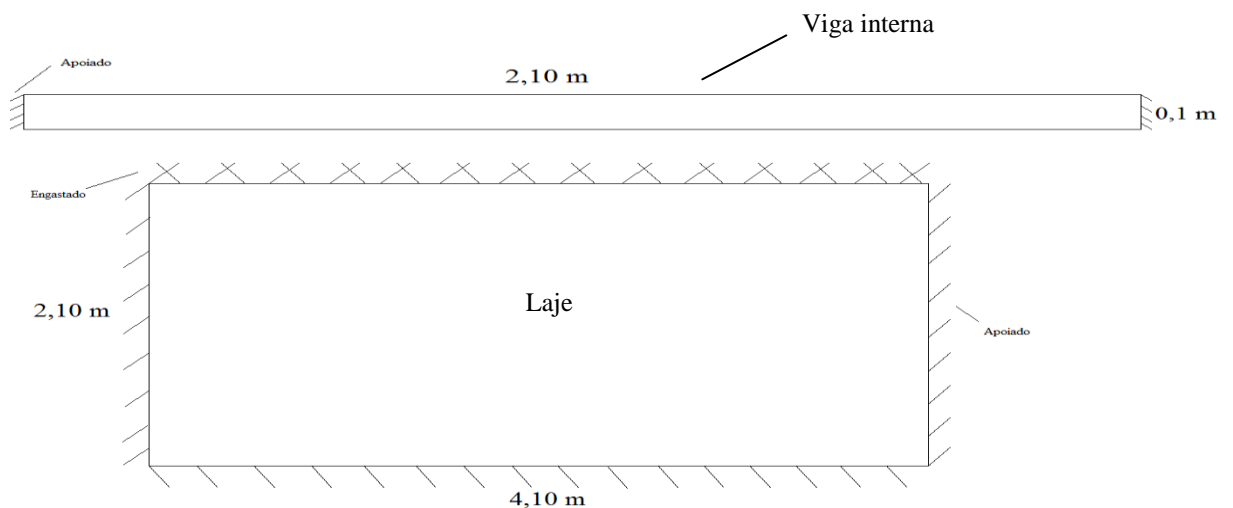


Figura 12 - Viga interna e laje (ligada à V_1 , V_2 e V_3).

A seguir constam os gráficos comparativos entre as análises obtidas mediante a utilização dos dois métodos para as vigas externas V_3 e V_5 .

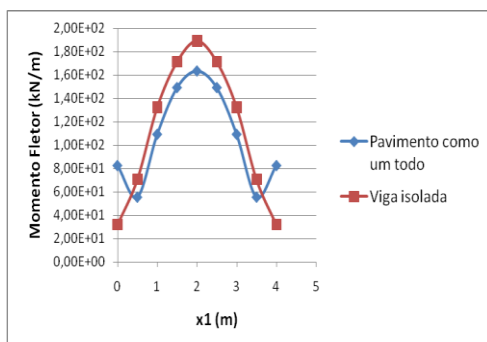


Figura 13 – Momento fletor nas vigas V_3 e V_5 – Pavimento x Viga isolada

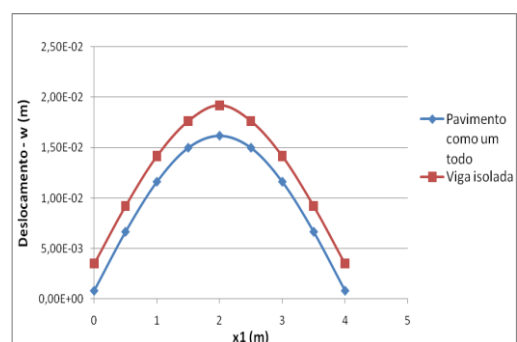


Figura 14 – Deslocamento transversal nas vigas V_3 e V_5 – Pavimento x Viga isolada

Abaixo, segue-se ainda, as comparações entre as análises através dos dois métodos para a viga V_4 , a viga interna.

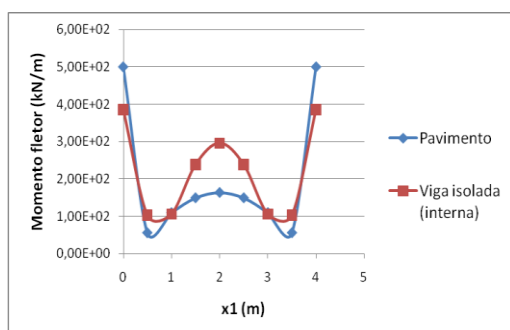


Figura 15 – Momento fletor na viga V_4 – viga interna

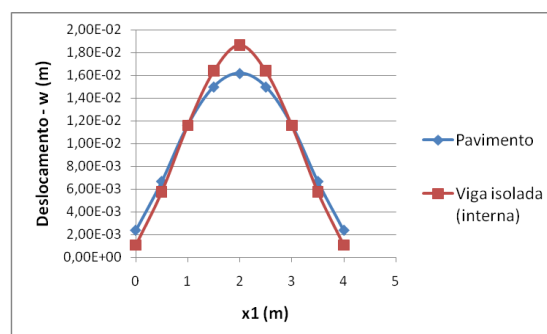


Figura 16 – Deslocamento transversal na viga V_4 - viga interna

6. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho era desenvolver o estudo teórico e realizar análises numéricas de pavimentos de edifícios sujeitos à flexão simples utilizando-se formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC), comparando-se a análise isolada dos elementos do pavimento e análise conjunta, do pavimento como um todo, além da comparação de vigas apoiadas em pilares na formulação do MEC com o *software* Ftool.

Na aplicação numérica, os resultados para deslocamentos transversais e momentos fletores foram praticamente iguais no exemplo da viga com dois pilares nas extremidades. Já para o primeiro exemplo, mais complexo, apresentado acima, com três pilares definidos ao longo da viga, os resultados foram similares, com diferenças não muito significativas. É importante dizer que os dois modelos numéricos são distintos, e, portanto, esperava-se que os resultados fossem apenas similares e não exatamente iguais, como ocorreu. Já a comparação entre os exemplos com coeficientes de Poisson nulo e igual a 0,2, forneceu valores praticamente idênticos para o deslocamento transversal e pequenas distinções para os momentos fletores, isso fundamenta-se no fato de se tratar de uma viga, sendo razoável aproximar o coeficiente de Poisson a zero sem muito prejuízo.

No que tange às análises de pavimentos (placas enrijecidas) com presença de pilares, foi perceptível que os valores tanto para o deslocamento transversal quanto para o momento fletor não coincidiram quando se fez a comparação por meio de dois métodos distintos. Tal fato é plausível e esperado, haja vista que, um método é mais complexo e considera o

pavimento como um todo, e em contra partida, o outro analisa isoladamente cada elemento estrutural constituinte do pavimento, os quais são dotados de maior simplicidade. Observou-se deslocamentos menores quando se considera o pavimento como um todo.

O objetivo proposto obteve êxito, isso porque não se esperava que os valores identificados fossem idênticos e sim semelhantes, assim como foi constatado. Demonstra-se de tal forma a incorporação de erros à medida que se lança mão de simplificações e aproximações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BREBBIA, C. A. and DOMINGUEZ, J. (1989) – **Boundary Elements – An Introductory Course**.

CHAVES, E. W. V. (1997). **Análise de Placas com Variação de Espessura Através do Método dos Elementos de Contorno**. São Carlos, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

DENIPOTTI, G. J. (2007). **Inclusão de Pilares numa formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise Linear de pavimentos de edifícios**. Ilha Solteira. 153 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

FERNANDES, G. R. (1998). **O Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise Não Linear de Placas**. São Carlos. 178 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

FERNANDES, G. R. (2003). **Análise Não Linear de Estruturas de Pavimento de Edifícios Através do Método dos Elementos de Contorno**. 272 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

FERNANDES, G.R. (2005). **Introdução ao Método dos Elementos de Contorno. Material Didático** - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 122 p.

FERNANDES, Gabriela Rezende ; DENIPOTTI, Guido J. ; KONDA, Danilo H. **A BEM formulation for analysing the coupled stretching bending problem of plates reinforced by rectangular beams with columns defined in the domain**. Computational Mechanics, v. 45, p. 523-539, 2010.

KONDA, D. H. (2008). **Análise linear de pavimentos de edifícios através de uma formulação do MEC baseada nas hipóteses de Reissner**. 184 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.