# Semigrupos Numéricos e Curvas Algébricas

Nara Reges Faria de Paiva [1], Ronaldo Alves Garcia [2]

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.*

narapaiva.mat@gmail.com, ragarcia@mat.ufg.br

**Resumo**

No trabalho de inciação científica do período 2009/2010, [3] , estudamos certas propriedades de semigrupos com vários geradores. O nosso interesse neste trabalho é estudar a relação desses semigrupos com as curvas algébricas que os geram. Também veremos uma condição sobre as curvas algébricas para que o semigrupo gerado por ela seja simétrico.

# 1 Introdução

Um semigrupo numérico $S$ é um subconjunto de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 \in S$ e $S$ é fechado em relação à adição. Todo semigrupo numérico possui uma quantidade única mínima de geradores.

Um semigrupo é dito unitário quando seus geradores são primos entre si. Como foi provado no relatório de iniciação científica do período 2009/2010 [3], a quantidade de números naturais que não pertencem a um semigrupo unitário é finita. Chamamos de número de Frobenius ($F$) o maior destes naturais.

Dizemos que um semigrupo $S$ é simétrico se a diferença de $F$ com cada um dos elementos do conjunto $\mathbb{N} - S$ pertencer a $S$. Ou de outra forma, $S$ é simétrico se dados dois números naturais cuja soma é $F$, um deles pertence à $S$ e o outro não.

A multiplicidade $e$ de $S$ é o menor elemento não-nulo do semigrupo.

Seja $S$ um semigrupo numérico e seja $n \in S - \{0\}$. O conjunto Apèry de $S$ com respeito a $n$ é o conjunto

$$Ap(S, n) = \{s \in S | s - n \notin S\}.$$

Chamaremos de $X_n$ o conjunto dos menores elementos pertencentes ao semigrupo $S$ que são incongruentes módulo $n$, isto é,

$$X_n = \{\omega(0) = 0, \omega(1), ..., \omega(n-1)\}$$

[1] orientanda IC-Balcão Processo número 503721/2010 – 7.

[2] orientador.

onde $\omega(i) \equiv i(mod\ n)$, com $i = 0, 1, ..., n-1$. Reescrevemos $X_n$ renomeando seus elementos e reordenando-os em ordem crescente como segue:

$$X_n = \{\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{n-1}\}.$$

Observe que se $e$ é a multiplicidade do semigrupo $S$, qualquer um de seus elementos pode ser escrito da forma $\omega_i + ke$, com $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, ..., e-1\}$. Por outro, lado qualquer combinação linear de elementos do conjunto $X_e \cup \{e\}$ pertence à $S$. Logo, $S =< X_e \cup \{e\} >$.

# 2 Curvas Algébricas

A cada curva algébrica $\alpha$, considere a função

$$\varphi_\alpha : (\mathbb{R}[x, y], +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{N}, +, \cdot)$$

que a cada polinômio $p$ que se anula na origem, associa a ordem de $p$. Onde assumimos a ordem de um polinômio como o grau do termo de menor grau deste polinômio.

Seja $\alpha(t)$ uma curva algébrica. Observamos que $p = 0$ é um polinômio que se anula na origem, portanto pertence ao domínio de $\varphi_\alpha$, e $\varphi_\alpha(0) = 0$. Observe também que se $p$ e $q$ são polinômios que se anulam na origem, eles satisfazem:

$$\varphi_\alpha(p \cdot q) = \varphi_\alpha(p) + \varphi_\alpha(q).$$

Portanto, se chamarmos de $S_\alpha$ o conjunto imagem da função $\varphi_\alpha$, pelas observações anteriores, temos que $S_\alpha$ é um semigrupo numérico. Logo, a cada curva algébrica $\alpha$ podemos associar um semigrupo $S_\alpha$, e dizemos que $\alpha$ gera $S_\alpha$.

A função $\varphi_\alpha$ é sobrejetiva, pois como sabemos, todo semigrupo numérico possui uma quantidade única mínima de geradores. Então, seja $S$ um semigrupo numérico e $x_1, ..., x_k$ os seus mínimos geradores. A curva $\alpha(t)$ definida de forma que sua i-ésima coordenada é igual a $t^{x_i}$ é tal que $\varphi_\alpha$ gera o semigrupo $S$, isto é, $S = S_\alpha$.

O exemplo a seguir, nos mostra que um mesmo semigrupo pode ser gerado por curvas diferentes.

**Exemplo 1.** *A curva* $\alpha(t) = (t^4, t^6 + t^{11})$ *gera o semigrupo* $S_\alpha = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ...\}$. *Vemos que* $S_\alpha =< 4, 6, 17 >$, *e este semigrupo também é imagem da função* $\varphi_\gamma$, *onde* $\gamma(t) = (t^4, t^6, t^{17})$. *Isto é,* $S_\alpha = S_\gamma$.

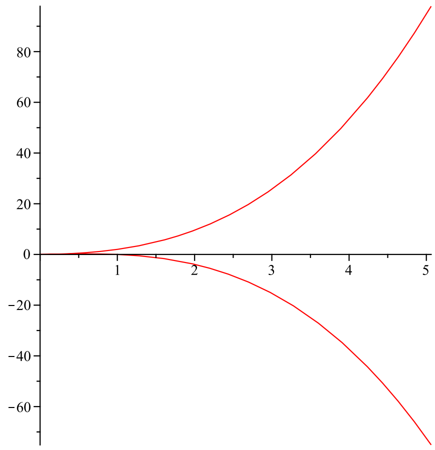


Figura 1. Curva $\alpha(t)$

Nós chamamos valor atingido os elementos da imagem da função $\varphi_\alpha$ para alguma curva algébrica $\alpha$.

# 3 Semigrupos Simétricos

A princípio, para verificarmos se um semigrupo $S$ é simétrico devemos encontrar o conjunto $\mathbb{N} - S$, fazer a diferença de $F$ com cada elemento deste conjunto e observar se essa diferença pertence a $S$. Quanto maior o conjunto das lacunas de $S$ mais trabalhoso se torna tal verificação.

O lema a seguir nos oferece uma opção mais prática, ver [1].

**Lema 1.** *Seja $S$ um semigrupo unitário contendo os números $0$ e $p$. Considere o conjunto*

$$X_p = \{\omega_0 = 0, \omega_1, ..., \omega_{p-1}\}.$$

*Uma condição necessária e suficiente para que $S =< X_p \cup \{p\} >$ seja simétrico é que, se $i + j = p - 1$ então $\omega_i + \omega_j = \omega_{p-1}$. Neste caso $F = \omega_{p-1} - p$.*

*Demonstração.* $(\Rightarrow)$ $S$ é simétrico, então existe uma permutação $j_1, j_2, ..., j_{p-1}$ dos números $1, 2, ..., p-1$ tal que $\omega_i + (\omega_{j_i} - p) = \omega_{p-1} - p$. Isto é, $\omega_i + \omega_{j_i} = \omega_{p-1}$. E como os $\omega_i$ são classificados em ordem crescente, $j_i = p - 1 - i$.

$(\Leftarrow)$ Sejam $x, y \in \mathbb{N}$ tais que $x + y = \omega_{p-1} - p$. Sabemos que $x$ e $y$ podem ser escritos da forma $x = \omega_i + \lambda_1 p$ e $y = \omega_j + \lambda_2 p$,

$$\Rightarrow x + y = \omega_{p-1} - p$$

$$\omega_i + \omega_j + (\lambda_1 + \lambda_2)p.$$

Mas, se $i+j=p-1$ temos $\omega_i+\omega_j=\omega_{p-1}$,

$$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2)p=-p$$

$$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2=-1.$$

Assim, $\lambda_1>0$ e $\lambda_2<0$. Logo, $x\in S$ e $y\notin S$. Concluímos então que $S$ é simétrico. $\square$

Com este lema, escolhemos a multiplicidade $e$ de $S$ e então basta observar se $\left\lfloor \frac{e+1}{2} \right\rfloor$ somas são iguais a $\omega_{e-1}$. O trabalho foi significativamente reduzido.

**Exemplo 2.** *Considere* $S=<3,7>=\{0,3,6,7,9,10,12,13,14,15,...\}$, $F=11$, *o conjunto das lacunas de* $S$ *é* $\mathbb{N}-S=\{1,2,4,5,8,11\}$. *Tal semigrupo é simétrico pois cada elemento* $x\in\mathbb{N}-S$ *satisfaz:* $F-x\in S$. *Vamos verificar que* $S$ *satisfaz o Lema* 1. *O conjunto Apèry de* $S$ *com respeito a* 6 *é* $Ap(S,6)=\{0,3,7,10,14,17\}$ *e*

$$\omega_0+\omega_5=0+17=\omega_5$$

$$\omega_1+\omega_4=3+14=\omega_5$$

$$\omega_2+\omega_3=7+10=\omega_5.$$

*Logo, o Lema* 1 *é satisfeito pelo semigrupo* $S$.

**Exemplo 3.** *Por outro lado, escolhemos o conjunto*

$$X_4=\{0,9,14,23\}$$

*de forma que* $0,4\in S=<X_4\cup\{4\}>$, *e cujos elementos são incongruentes módulo* 4, *e satisfazem a hipótese da recíproca do Lema* 1. *Vamos verificar que* $S$ *é simétrico. Observe que* $S=<4,9,14>=\{0,4,8,9,12,13,14,16,17,18,20,21,22,23,24,...\}$, $F=19$, $\mathbb{N}-S=\{1,2,3,5,6,7,10,11,15,19\}$ *e* $Ap(S,4)=X_4$. *E,*

$$19-1=18\in S$$

$$19-2=17\in S$$

$$19-3=16\in S$$

$$19-5=14\in S$$

$$19-6=13\in S$$

$$19-7=12\in S$$

$$19-10=9\in S$$

$$19-11=8\in S$$

$$19-15=4\in S$$

$$19-19=0\in S.$$

*Portanto $S$ é simétrico.*

O lema a seguir é o teorema 2.1 de [2].

**Lema 2.** *(Apèry) Se $e$ é a multiplicidade do semigrupo $S$, que é o conjunto dos valores atingidos anexados ao ramo da curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, e $Ap(S, e) = \{\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{e-1}\}$ é o conjunto Apèry de $S$ com respeito a $e$. Então, sendo $S'$ o conjunto dos valores atingidos anexados ao ramo da curva $x' = f(t)$, $y' = g(t)/f(t)$, o conjunto Apèry de $S'$ com respeito a $e$ é $Ap(S, e) = \{\omega_0, \omega_1 - e, \omega_2 - 2e, ..., \omega_{e-1} - e(e-1)\}$. Estamos supondo ordem de $g$ maior que a ordem de $f$.*

**Exemplo 4.** *Considere a curva $x = f(t) = t^6$, $y = g(t) = t^9 + t^{10}$. O conjunto dos valores atingidos anexados ao ramo desta curva é o semigrupo $S =< 6, 9, 19 >= \{0, 6, 9, 12, 15, 18, 19, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, \ 47, 48, 49, ...\}$, e o conjunto Apèry de $S$ com respeito à sua multiplicidade 6 é $Ap(S, 6) = \{\omega_0 = 0, \omega_1 = 9, \omega_2 = 19, \omega_3 = 28, \omega_4 = 38, \omega_5 = 47\}$. Calculamos $x' = f(t) = t^6$, $y' = g(t)/+f(t) = t^3 + t^4$. O conjunto dos valores atingidos anexados ao ramo desta nova curva é o semigrupo $S' =< 3, 7 >= \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, ...\}$. Observamos que o conjunto Apèry de $S'$ com respeito à 6 é $Ap(S', 6) = \{\omega'_o = o, \omega'_1 = 3, \omega'_2 = 7, \omega'_3 = 10, \omega'_4 = 14, \omega'_5 = 17\}$, que é exatamente, $Ap(S, 6) = \{\omega_0, \omega_1 - 6, \omega_2 - 2 \cdot 6, \omega_3 - 3 \cdot 6, \omega_4 - 4 \cdot 6, \omega_5 - 5 \cdot 6\}$*

O lema 3 e o teorema 4 podem ser encontrados em [1].

**Lema 3.** *Se o conjunto dos valores atingidos anexados ao ramo da curva $x = f(t)$, $y = g(t)$ é um semigrupo simétrico, então o conjunto dos valores atingidos anexados ao ramo da curva $x' = f(t)$, $y' = g(t)f(t)$, onde supomos a ordem de $g$ superior à ordem de $f$, também é um semigrupo simétrico.*

*Demonstração.* Seja $C$ o ramo da curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, sendo os valores atingidos anexados ao ramo da curva $C$ o semigrupo simétrico $S$. E seja $e$ a multiplicidade de $S$. Chame $C'$ o ramo da curva $x = f(t)$, $y = g(t)f(t)$ e $S'$ o conjunto dos valores anexados ao ramo da curva $C'$. Pelo *Lema* 2, os elementos do conjunto Apèry de $S'$ com respeito a $e$ são da forma $\omega'_i = \omega_i + ei$. Sejam $\omega'_i, \omega'_j \in Ap(S', e)$, então

$$\Rightarrow \omega'_i + \omega'_j = \omega_i + \omega_j + e(i + j)$$

Mas, se $i + j = e - 1$, pelo *Lema* 1, $\omega_i + \omega_j = \omega_{e-1}$. Assim,

$$\Rightarrow \omega'_i + \omega'_j = \omega_{e-1} + e(e-1) = \omega'_{e-1}.$$

Logo, $S'$ é também simétrico. $\square$

**Teorema 4.** *O conjunto dos valores atingidos anexados ao ramo de uma curva plana qualquer é um semigrupo simétrico.*

*Demonstração.* A qualquer curva $x = f(t)$, $y = g(t)$ podemos associar:

$i)$ se a ordem de $f$ é inferior à ordem de $g$, a curva $x = f$ e $y = g/f$.

$ii)$ se a ordem de $f$ é igual à ordem de $g$, a curva $x = f$ e $y = g - \lambda f$, onde a constante $\lambda$ é tal que a ordem de $g + \lambda f$ é maior que a de $f$.

Assim se reduz o semigrupo para o caso em que ele é o próprio cojunto dos naturais, que é claramente simétrico. □

Este teorema nos diz que toda curva plana se associa a um semigrupo simétrico. No entanto a recíproca deste teorema não é verdadeira, e o semigrupo $S$ mostrado no *Exemplo* 2 é um contra exemplo. Observe que $\mathbb{N} - S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 20, 22, 23, 26, 29, 32, 35, 41\}$, o número de Frobenius deste semigrupo é $F = 41$, e para cada elemento $x \in \mathbb{N} - S$ a diferença $F - x$ está em $S$. Logo, $S$ é um semigrupo simétrico. No entanto, sendo $S$ gerado pelos números $6, 9, 19$ ele pode ser associado também a curva $x = t^6$, $y = t^9$, $z = t^{19}$. Chamamos esta curva de $\alpha(t)$ e usando recursos de geometria diferencial encontramos que a torção de $\alpha(t)$ é não-nula. Assim temos uma curva que não é plana e a ela é associado um semigrupo simétrico.

Mas existem semigrupos não simétricos cujos elementos são valores atingidos anexados ao ramo de uma curva que não é plana, como é o caso do semigrupo $S =< 3, 7, 8 >= \{0, 3, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$, cujos elementos são valores atingidos anexados ao ramo da curva $x = t^3$, $y = t^7$, $z = t^8$ que não é plana. Observe que $\mathbb{N} - S = \{1, 2, 4, 5\}$, $F = 5$, mas $5 - 2 = 3 \notin S$, isto é, $S$ não é simétrico.

# 4 Soma de Semigrupos

Definimos a soma de dois semigrupos $S_1$ e $S_2$ da seguinte forma:

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 | s_1 \in S_1 e s_2 \in S_2\}.$$

Se $x_1, ..., x_m$ e $y_1, ..., y_n$ são os mínimos geradores de $S_1$ e $S_2$ respectivamente, então $x_1, ...x_m, y_1, ..., y_n$ são geradores de $S_1 + S_2$. Excluíndo desta lista os elementos que podem ser gerados por combinação de outros elementos da lista, encontramos $z_1, ..., z_k$ que são os mínimos geradores de $S_1 + S_2$.

**Exemplo 5.** *Sejam* $S_1 =< 5, 7 >= \{0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, ...\}$ *e* $S_2 =< 6, 11 >= \{0, 6, 11, 12, 17, 18, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, ...\}$ *semigrupos. A soma de tais é:*

$$S_1 + S_2 = \{0, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...\} =< 5, 6, 7 > .$$

*Neste caso o* $11$ *foi excluído da lista de geradores de* $S_1 + S_2$ *pois é uma combinação linear dos números* $5$ *e* $6$ *que também são geradores.*

**Exemplo 6.** *Agora considere* $S_1 =< 5, 11 >= \{0, 5, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, ...\}$ *e* $S_2 =< 7, 8 >= \{0, 7, 8, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, ...\}$ *semigrupos. A soma deles é:* $S_1+S_2 = \{0, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, ...\} =< 5, 7, 8, 11, >$*. Neste caso nenhum gerador foi excluído, pois nehum número na lista* $5, 7, 8, 11$ *pode ser gerado pela combinação dos outros.*

# 5 Conclusão

Dada uma curva plana qualquer, podemos reduzi-la a uma curva mais simples através do algoritmo dado na demonstração do *Teorema* 4. O processo inverso desse algorítmo nos leva de uma curva simples, cujos valores anexados ao seu ramo é um semigrupo simétrico, à curva desejada. Sendo que o processo inverso, pelo *Lema* 3, não tira a propriedade de que o semigrupo gerado pelo ramo da curva é simétrico.

# Referências


[1] Apèry, Roger, *Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques,* Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris, vol. 222 (1946), 1198-1200

[2] Barucci, V.; D'Anna, M.; Fröberg, R., The Apery Algorithm for a Plane Singularity wigh Two Branches, *Beiträge Algebra Geom. 46 (2005), no. 1, 1-18.*

[3] Paiva, N. R. F., Propriedades de Semigrupos Numéricos com Vários Geradores, *Trabalho de Iniciação Científica UFG 2009/2010*

[4] Rosales, J. C., Numerical Semigroups with Multiplicity Three and Four, *Semigroup Forum 71 (2005), no. 2, 323-331.*