Desigualdades Universais para Autovalores de Operadores Poliharmônicos

PEREIRA, Rosane Gomes; **ADRIANO**, Levi Rosa

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: rosanegope@yahoo.com.br; levi@mat.ufg.br

Palavras chaves: Variedades Riemannianas, Operadores Poliharmônicos, Cotas Universais, Desigualdade tipo-Yang.

1 Introdução

Seja Ω um domínio conexo, limitado e com fronteira suave no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ν o campo normal unitário exterior de $\partial\Omega$ e seja l um inteiro positivo. Soluções de $\Delta u = 0$ num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ são as clássicas funções harmônicas que descrevem a posição de equilíbrio de uma membrana elástica homogênea. Soluções de $\Delta^2 u = 0$ são chamadas biharmônicas, e elas modelam o equilíbrio de placas homogêneas. Similarmente, soluções de $\Delta^l u = 0, l \in \mathbb{N}$; são chamadas poliharmônicas.

Podemos então naturalmente considerar o seguinte problema de autovalor

$$(-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.1}$$

Seja

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots,$$

a sequência de autovalores do problema (1.1), onde cada autovalor é repetido de acordo com a sua multiplicidade. O caso $l = 1$ é bastante estudado, desde os trabalhos de Weyl, [1], e Courant-Hilbert, [2]. Mas também para $l \geq 2$, as funções poliharmônicas possuem interessantes aplicações na física.

Outras questões surgiram ao longo dos anos, como por exemplo, investigar os autovalores do problema (1.1) para l qualquer, com respeito as chamadas propriedades universais, isto é, propriedades que não dependem do domínio Ω propriamente, mas somente de sua dimensão

n. Estas propriedades universais então resultam em relações entre diferentes autovalores. Em [4], Payne, Pólya e Weinberger mostraram a seguinte estimativa

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \quad k = 1, 2, \cdots ,$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Este resultado se estende facilmente para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{kn} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \quad k = 1, 2, \cdots , \tag{1.2}$$

Muitos trabalhos interessantes surgiram generalizando a desigualdade (1.2) como por exemplo [5],[7],[8],[9],[10], [11] e outros. Nesta direção, mencionaremos dois resultados. Em 1980, Hile e Protter [10] mostraram

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{kn}{4}, \quad k = 1, 2, \cdots , .$$

Em 1991, Yang [11] provou uma desigualdade mais forte

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\Big(\lambda_{k+1} - \Big(1 + \frac{4}{n}\Big)\lambda_i\Big) \leq 0, \quad k = 1, 2, \cdots , .$$

A desigualdade acima, conforme Yang mesmo observou, e comprovado posteriormente em [5], [6], [7] é a melhor das desigualdades clássicas que são obtidas seguindo o método desenvolvido por Payne-Pólya-Weinberger.

O objetivo deste trabalho é obter uma desigualdade universal do tipo Yang, para os autovalores do problema (1.1) para qualquer l. Ou seja, vamos considerar o problema de autovalor mais geral

$$(-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad M$$
$$u|_{\partial M} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M} = \cdots = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\bigg|_{\partial M} = 0$$

onde M é uma variedade Riemanniana compacta com fronteira (possivelmente vazia) e Δ é o operador Laplaciano em M.

2 Resultados e Discussão

Nos resultados seguintes são apresentadas desigualdades universais para os autovalores do operador poliharmônico em domínios compactos no Espaço Euclideano e na Esfera.

Teorema 2.1. Seja Ω um domínio limitado conexo em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, n-dimensional, e seja Δ o laplaciano de $\mathbb{R}^n$. Denote por λ_i o i-ésimo autovalor do problema de autovalor

$$(-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Então temos

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \left(\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Corolário 2.1. Sobre as mesmas hipóteses do Teorema (2.1), temos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{2l(n+2l-2)}{k^2n^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right) + \\ \left\{\left(\frac{2l(n+2l-2)}{k^2n^2}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{l-1}{l}}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^2 - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.4}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} \leq \left(1+\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \\ \left\{\left(\frac{2l(n+2l-2)}{n^2}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \left(1+\frac{4l(n+2l-2)}{n^2}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Teorema 2.2. Seja λ_i o i-ésimo autovalor do seguinte problema de autovalor

$$(-\Delta)^l u = \lambda u \quad em \quad \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

onde Ω é um domínio compacto conexo em uma n-esfera unitária S^n.

Então temos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \\ &\leq \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(\mid a_{l-1}\mid \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + \mid a_1 \mid \lambda_i^{\frac{1}{l}} + \mid a_0 \mid)\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\times\left\{\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(n^2+4\lambda_i^{\frac{1}{l}})\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Corolário 2.2. Sobre as mesmas hipóteses do Teorema (2.2), temos

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{1}{2n^2k^2}\left(\sum_{i=1}^{k}(\mid a_{l-1} \mid \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + \mid a_1 \mid \lambda_i^{\frac{1}{l}} + \mid a_0 \mid)\right) \times \left(kn^2 + 4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)$$

$$+ \quad \left\{\frac{1}{4n^4k^4}\left(\sum_{i=1}^{k}(\mid a_{l-1} \mid \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + \mid a_1 \mid \lambda_i^{\frac{1}{l}} + \mid a_0 \mid)\right)^2 \left(kn^2 + 4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)^2 \right.$$
$$\left. -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

e $\lambda_{k+1} \ \leq \ U_{k+1} + \sqrt{U_{k+1}^2 - V_{k+1}}$, onde

$$U_{k+1} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \frac{1}{2n^2k}\sum_{i=1}^{k}\left(\mid a_{l-1} \mid \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + \mid a_1 \mid \lambda_i^{\frac{1}{l}} + \mid a_0 \mid\right)\left(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right)$$

e

$$V_{k+1} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 + \frac{1}{n^2k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\mid a_{l-1} \mid \lambda_i^{\frac{l-1}{l}} + \cdots + \mid a_1 \mid \lambda_i^{\frac{1}{l}} + \mid a_0 \mid\right)\left(n^2 + 4\lambda_i^{\frac{1}{l}}\right).$$

3 Conclusões

Concluímos que a desigualdade obtida para um domínio compacto no Espaço Euclideano é mais forte do que a conhecida desigualdade tipo Payne-Pólya-Weinberg. Além disso, esta, cobre a importante desigualdade de Yang em autovalores do Laplaciano de Dirichlet.

Referências

[1] Weyl,H. - *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigeinwerte linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. 71, 1912, 441 - 469.

[2] Courant,R., Hilbert, D. - *Methoden der mathematischen Physik I*, 3rd ed., Springer, 1968.

[3] Jost, J., Li-Jost, X. Q., Wang, Q. , Xia, C. - *Universal bounds for eigenvalues of the polyharmonic operators*, To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[4] Payne, L. E., Pólya, G., Weinberger, H. F. - *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. and Phys, 35, 1956, 289-298.

[5] Ashbaugh, M. S. *Isoperimetric and universal inequalities for eigenvalues, in Spectral theory and geometry*(Edinburgh, 1998), E. B. Davies and Yu Safalov eds,. London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 273, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 95-139.

[6] Ashbaugh, M. S. *The universal eigenvalue bounds of Payne-Pólya-Weinberger*, Hile-Protter, and H. C. Yang. Spectral and inverse spectral theory (Goa, 2000). Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 112, 2002, 3-30.

[7] Ashbaugh, M. S., Hermi, L. *A unified approach to universal inequalities for eigenvalues of elliptic operators*, Pacific J. Math., 217, 2004, 201-219.

[8] Cheng, Q. M. , Yang, H. C. *Estimates on eigenvalues of Laplacian*, Math. Ann., 331, 2005, 445-460.

[9] Harrell, E. M. , Michel, P. L. *Commutator bounds for eigenvalues, with applications to spectral geometry*, Commun. Part. Differ. Eq., 19, 1994, 2037-2055.

[10] Hile, G. N., Protter, M. H. *Inequalities for eigenvalues of the Laplacian*, Indiana Univ. Math. J., 29, 1980, 523-538.

[11] Yang, H. C. *Estimates of the difference between consecutive eigenvalues*, preprint, 1995 (revision of International Centre for Theoretical Physics preprint IC/ 91/ 60, Trieste, Italy, April 1991).