Sobre uma Classe de Equações Elípticas Não-Lineares de Quarta Ordem sob Condições de Fronteira de Navier.

Kaye Oliveira da **Silva**; José Valdo Abreu **Gonçalves**

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: kyeoliveira@hotmail.com; jvg@mat.ufg.br

Palavras chaves: Problema de quarta ordem, Equações Elipticas, Teorema de ponto fixo, Método de Lyapunov-Schimdt.

1 Introdução

Considere o seguinte problema elíptico não-linear de quarta ordem:

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u - \mu_1 u + g(x,u) = f & em\ \Omega \\ \mathfrak{B}u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \qquad *$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $f \in L^2(\Omega)$ $\alpha \geq 0$, $-\infty < \beta < \alpha\lambda_1$, λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, a condição de fronteira $\mathfrak{B}u = 0$ em $\partial\Omega$ significa $u = \Delta u = 0$ em $\partial\Omega$ quando $\alpha > 0$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$ quando $\alpha = 0$. μ_1 é o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = \mu u & em\ \Omega, \\ \mathfrak{B}u = 0 & em\ \partial\Omega. \end{cases} \qquad *_\mu$$

Além das hipóteses acima, pedimos que o termo não-linear $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça as condições de Carathéodory e:

$$|g(x,t)| \leq h(x),\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

para algum $h \in L^p(\Omega)$, onde $p \geq 1$, e

$$tg(x,t) \leq 0,\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Sob as condições acima e mais algumas adicionais, estudaremos existência e multiplicidade de soluções para o problema *. Tal estudo será feito utilizando métodos topológicos (componentes conexas de pontos fixos e bifurcação global). Para uma melhor compreensão do problema $*_\mu$ confira [7].

2 Materiais e Métodos

2.1 Continuum de Pontos Fixos

Um teorema de extrema importância no nosso trabalho é cf [6]:

Teorema 2.1.1. Seja X um espaço de Banach e suponha que $C \subset X$ é limitado, fechado e convexo. Se $K : \mathbb{R} \times C \to C$ é compacto, então o conjunto

$$S_{\mathbb{R}} = \{(s, u) \in \mathbb{R} \times C | K(s, u) = u\}$$

contém um continuum C_∞ tal que

$$C_\infty \cap (\{\lambda\} \times C) \neq \emptyset, \ para \ cada \ \lambda \in \mathbb{R}$$

2.2 Método de Lyapunov Schmidt

Seja

$$Lu = \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u - \mu_1 u, \ u \in D(L)$$

onde,

$$D(L) = \{u \in H^4(\Omega) | u = \Delta u = 0 \ em \ \partial\Omega\}$$

Pode-se provar que $L^2 = N(L) \oplus R(L)$, e portanto, os operadores projeção $P : L^2(\Omega) \to N(L)$ e $Q : L^2(\Omega) \to R(L)$ estão bem definidos e são contínuos.

Deste modo, o problema * pode ser reescrito da forma

$$Lu + Gu = f, \ u \in D(L).$$

Além disso, $u = s\varphi_1 + w, \varphi_1 \perp w, w \in R(L)$.

O método de Lyapunov-Schmitd consiste em explorar de uma maneira "adequada"o sistema:

$$\begin{cases} Lw + QG(s\varphi_1 + w) = h \\ \quad PG(s\varphi_1 + w) = t\varphi_1 \end{cases}$$

onde, φ_1 é autofunção associada a λ_1, G é o operador de Nemytskii associado a g.

Utilizando o método de Lyapunov-Schmidt, nós reduzimos o problema * à um problema de pontos fixos de um operador compacto. Consequentemente, com auxílio do Teorema 2.1.1 obtemos os resultados desejados.

3 Resultados e discussões

Como vimos, o objetivo desse trabalho é mostrar que sob certas condições, o problema * admite ou não solução. Segue abaixo um dos resultados principais que é enunciado no teorema Cf [1-5]:

Teorema 3.1. Suponha que $\alpha > 0$. Seja $f \in L^2$ com $f = t\varphi_1 + h$, $\varphi_1 \perp h$, $t \in \mathbb{R}$. Suponha que g satisfaz 1.1. Então existe um conjunto limitado $\Lambda_h \subset \mathbb{R}$ tal que o problema * admite solução se e somente se $t \in \Lambda_h$. Ademais, (1.1) admite uma solução para t=0 se 1.2 vale e $h \in L^\infty$.

Além disso, se $h \in L^\infty$ e g satisfaz

$$tg(x,t) < 0\, para\; x \in \Omega\; e\; |t| \geq T,\; para\; algum\; T > 0,\; com\; g\; continua\; em\; \Omega \times (-T,T)^c \quad (3.3)$$

e

$$g(x,t) \to 0\; q.t.p.\; se t\; \to \pm\infty,\; x \in \Omega \quad (3.4)$$

então, existem números reais a_*, b^* com $a_* < 0 < b^*$ tais que $\Lambda_h^* = [a_*, 0) \cup (0, b^*] \subset \Lambda_h$ e * admite no mínimo duas soluções se $t \in \Lambda_h^*$.

Como podemos ver no Teorema 3.1, foi estabelicido condições para que o problema * tenha solução. Além disso, tem-se que sob certas condições adicionais (3.3 e 3.4), o problema admite múltiplas soluções.

4 Conclusões

O Teorema 3.1 estabelece f regiões onde o problema * possui solução. Além disso provou-se que em determinadas regiões, esse problema possui mais de uma solução. Esse é um resultado significativo, pois facilita a compreensão do problema * sob as condições dadas, e além disso, como tal problema tem várias aplicações, principalmente na física, segue-se que o resultado é de grande importância para o mundo científico.

Vale lembrar também a utilidade do método de Lyapunov-Schmidt e o teorema sobre pontos fixos. Ambos são resultados de grande profundidade na matemática e de grande utilidade no nosso trabalho.

Referências

[1] Costa, D. G. and Gonçalves, J. V. A - *Existence and multiplicity results for a class of nonlinear elliptic boundary value problems at resonance*. J. MAth. Anal. Appl., 84 (1981), 328-337.

[2] Figueiredo, Djairo Guedes and Ni, Wei Ming - *Perturbations of second order linear elliptic problems by nonlinearities without Landsman-Lazer conditions*. Nonlinear Anal. 3 (1979), 629-634.

[3] Gonçalves, José Valdo A - *On bounded nonlinear perturbations of an elliptic equation at resonance*. Nonlinear Anal. 5 (1981), 57-60.

[4] Ling Xu - *Multiplicity results for fourth-order boundary-value problems at resonance with variable coefficients*, Elect. Journal of Differential Equations, Vol. 2008(2008). No. 100, pp. 1-8.

[5] Ma, Ruyun and Yang, Yunrui - *Existence result for a singular nonlinear boundary value problem at resonance*. Nonlinear Analysis 68 (2008), 671-680.

[6] Sun, Jingxian and Song, Fuming - *A property of connected components and its applications*. Topology and its Applications, 125 (2002) 553-560

[7] Gupta, C.P. and Kwong, Y.C. - *Biharmonic eigenvalue problems and L^p estimates*. Internat. J. Math. Math. Sci., 13 (1990) 469-480.