# Um algoritmo para estimar o segundo grupo de homologia de algum grupo finitamente apresentado

**VIEIRA**, Flávio Pinto; **BUENO**, Ticianne Proença Adorno, **SERCONECK**, Shirlei

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.*

E-mail: flaviopintovieira.com; ticianne@mat.ufg.br; shirlei@mat.ufg.br

**Palavras chaves:** Automorfismos, Endomorfismos, Grupos Nilpotente, $p$-Grupos.

## 1 Introdução

Em 1956 Clair Miler estudou "O segundo grupo de homologia de um grupo; Relações entre comutadores", que apresentou uma interpretação teórica do segundo grupo de homologia $H_2(G,J)$ de um grupo $G$, com coeficientes inteiros $J$.

Será definido um novo grupo $H(G)$, chamado o grupo associado de $G$, que é informalmente o grupo de todas as relações que são satisfeitas por comutadores em $G$, tomando módulos dessas relações que são triviais, ou universalmente satisfeitas.

Em 2010 Joshua Roberts criou "Um algoritmo para estimar o segundo grupo de homologia de alguns grupos finitamente apresentados"que apresenta um algoritmo, mais precisamente, dado um grupo finitamente apresentado $G$ e um corpo finito $K$, o segundo grupo de homologia $H_2(G,H)$ com coeficientes em $K$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K$, onde $G$ age trivialmente. Em alguns casos ele calcula exatamente esta dimensão.

## 2 Resultados e Discussão

Dado um grupo $G$, seja $\langle G,G\rangle$ o grupo livre de todos os pares $\langle x,y\rangle$, com $x,y\in G$. Existe um homomorfismo natural $\varphi:\langle G,G\rangle\longrightarrow[G,G]$ definido por $\langle x,y\rangle\longmapsto[x,y]$.

Se $w\in\langle G,G\rangle$ sua imagem em $[G,G]$ e denotada por $[w]$.

**Definição 1.** Definimos $Z(G)$, como o Kernel, da seguinte forma $Z(G)=\{w\in\langle G,G\rangle|[w]=1\}$.

Seja $B(G)$ o subgrupo normal de $\langle G,G\rangle$ gerado pelas relações,

$$\langle x,x\rangle \sim 1 \tag{2.1}$$

$$\langle x,y\rangle \sim \langle y,x\rangle^{-1} \tag{2.2}$$

$$\langle xy,z\rangle \sim \langle y,z\rangle^{x}\langle x,z\rangle \tag{2.3}$$

$$\langle x,z\rangle^{x} \sim \langle x,[y,z]\rangle\langle y,z\rangle \tag{2.4}$$

onde $x, y\ e\ z \in G$ e por definição

$$\langle y,z\rangle^{x} = \langle y^{x},z^{x}\rangle = \langle xzx^{-1},x^{-1}zx\rangle. \tag{2.5}$$

Em outras palavras $B(G)$ é o subgrupo normal gerado por todos $\langle x,x\rangle$, todos $\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle$, etc. O símbolo $\sim$ significa congruência em $\langle G,G\rangle modB(G)$. Temos que $B(G) \subset Z(G)$, pois $B(G) \lhd Z(G)$.

**Definição 2.** Definimos o grupo associado de $G$ como, $H(G) = Z(G)/B(G)$.

**Definição 3.** Se $h : G \longrightarrow G$ é um homomorfismo definimos $h_{\#} : \langle G,G\rangle \longrightarrow \langle G',G'\rangle$ da seguinte forma $\langle x,y\rangle \longmapsto h_{\#}\langle x,y\rangle = \langle h(x),h(y)\rangle$.

Então $h_{\#}$ leva $Z(G)$ em $Z(G')$ pois, se $\langle x,y\rangle \in Z(G)$ implica $h_{\#}(\langle x,y\rangle) = \langle h(x),h(y)\rangle = h\langle x,y\rangle$ $\in Z(G')$ e $B(G)$ em $B(G')$ induzido um homomorfismo,$h_{*} : H(G) \longrightarrow H(G')$, que satisfaz $(hg)_{*} = h_{*}g_{*}$, $\quad 0_{*} = 0$, $\quad 1_{*} = 1$, onde $0$ é o homomorfismo nulo, $0(x) = 1$ e $1$ é um homomorfismo identidade $1(x) = x$.

Pela inversão em ambos os lados de $(3)$ e quocientando por $(2)$ temos, $\langle xy,z\rangle \sim \langle y,z\rangle^{x}\langle x,z\rangle$ $\overset{(2.5)}{\Longrightarrow} \langle xy,z\rangle^{-1} \sim (\langle y,z\rangle^{x}\langle x,z\rangle)^{-1} \overset{(2.5)}{\Longrightarrow} \langle xy,z\rangle^{-1} \sim \langle x,z\rangle^{-1}((\langle y,z\rangle^{x})^{-1} \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} \langle z,xy\rangle \sim \langle z,x\rangle((\langle y,z\rangle^{-1})^{x} \overset{(2.2)}{\Longrightarrow}$ $\langle xy,z\rangle^{-1} \sim \langle x,z\rangle^{-1}((\langle y,z\rangle^{x})^{-1} \overset{(2.2)}{\Longrightarrow} \langle z,xy\rangle \sim \langle z,x\rangle\langle z,y\rangle^{x}$.

Identificando $z \sim x$, $x \sim y$ e $y \sim z$ temos

$$\langle x,yz\rangle \sim \langle x,y\rangle\langle x,z\rangle^{y}. \tag{2.6}$$

Das muitas consequências da definição de $B(G)$, destacamos as seguintes propriedades:

**Propriedade 2.1.**

$$\langle x,y\rangle^{\langle a,b\rangle} \sim \langle x,y\rangle^{[a,b]} \tag{2.7}$$

$$[\langle x,y\rangle,\langle a,b\rangle] \sim \langle [x,y],[a,b]\rangle. \tag{2.8}$$

$$\langle b,b'\rangle\langle a_0,b_0\rangle \sim \langle [b,b'],a_0\rangle\langle a_0,[b,b']b_0\rangle\langle b,b'\rangle. \tag{2.9}$$

$$\langle b,b'\rangle\langle b_0,a_0\rangle \sim \langle [b,b']b_0,a_0\rangle\langle a_0,[b,b']\rangle\langle b,b'\rangle. \tag{2.10}$$

$$\langle b,b'\rangle\langle a,a'\rangle \sim \langle [b,b'],[a,a']\rangle\langle a,a'\rangle\langle b,b'\rangle. \tag{2.11}$$

$$\langle x^n,y^s\rangle \sim 1, \qquad n=\pm1,\pm2,\ldots;\ s=\pm1,\pm2,\ldots. \tag{2.12}$$

**Teorema 2.1.** O grupo associado de um grupo livre é um grupo unitário.

*Demonstração.* O caso de um grupo livre com um número infinito de geradores segue do caso de um grupo livre com um número finito de geradores.

Se $F$ é livre com infinitos geradores e $u \in H(F)$, então $u \in i_*H(F')$, onde $F'$ é um subgrupo de $F$ finitamente gerado e $i$ é a inclusão. O caso de um grupo livre $F$ ter porém um gerador, $H(F)=1$ por (2.12) $\langle x^n,y^s\rangle \sim 1$. $\square$

O caso geral de um grupo livre com finitos geradores segue por indução do lema que segue.

**Lema 2.1.** Se $G=A*B$ é o produto livre de $A$ e $B$, então $H(G)\simeq H(A)\times H(B)$.

*Demonstração.* Seja $i:A\longrightarrow G$ e $j:B\longrightarrow G$ as inclusões naturais e $p:G\longrightarrow A$ e $q:G\longrightarrow B$ as projeções naturais. Assim temos os homomorfismos mostrados no diagrama,

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[dr, "i_*"] & & H(B) \arrow[dl, "j_*"'] \\
& H(G) \arrow[dl, "p_*"'] \arrow[dr, "q_*"] & \\
H(A) & & H(B)
\end{tikzcd}$$

Como $i_*$ e $j_*$ homomorfismos injetores e $i_*H(A)$ e $j_*H(B)$ disjuntos, pois $A$ e $B$ são disjuntos pela definição de produto livre. No caso $H(G)$ é o produto dos grupos $i_*H(A)$ $j_*H(B)$, o diagrama também mostra que $H(G)=i_*H(A)\times j_*H(B)$ o produto direto interno dos grupos $i_*H(A)$, $j_*H(B)$. O problema é então demonstrar que $H(G)=i_*H(A)j_*H(B)$.

A fim de fazer isso, vamos nos preocupar com três subgrupo de $\langle G,G\rangle$; $A=i_\#\langle A,A\rangle$, $B=j_\#\langle B,B\rangle$ e $M$ o subgrupo de $\langle G,G\rangle$ gerado pelos elementos da forma $\langle a,b\rangle$, com $1\neq a\in A$ e $1\neq b\in B$. Seja $\langle x,y\rangle$ um gerador de $\langle G,G\rangle$ com $x=a_1b_1\ldots a_sb_s$, $y=\overline{a}_1\overline{b}_1\ldots\overline{a}_r\overline{b}_r$ com $a_i$, $\overline{a}_j\in A$, $b_i$, $\overline{b}_j\in B$. Aplicando repetidas vezes (2.3) e (2.6) vemos que $\langle x,y\rangle$ é congruente $modB(G)$ a um produto da forma $\langle a,a'\rangle^z$, $\langle b,b'\rangle^z$, $\langle a,b\rangle^z$ e $\langle b,a\rangle^z$, com $a,a'\in A$, $b,b'\in B$ e $z\in G$. Cada elemento dessa forma pode ser decomposto em um produto de temos do mesmo tipo, sem o expoente $z$, usando repetidas vezes as regras

$$\langle a,a'\rangle^{a_0}=\langle a^{a_0},a'_{a_0}\rangle \tag{2.13}$$

$$\langle a,a'\rangle^{b_0}\sim\langle b_0,[a,a']\rangle\langle a,a'\rangle \tag{2.14}$$

$$\langle a,b\rangle^{a_0}\sim\langle a_0a,b\rangle\langle b,a_0\rangle \tag{2.15}$$

$$\langle a,b\rangle^{b_0} \sim \langle b_0,a\rangle\langle a,b_0b\rangle, \tag{2.16}$$

mais quatro regras similares são obtidas dessas trocando $a$ com $b$, $a_0$ com $b_0$ e $a'$ com $b'$. Assim vemos que $\langle x,y\rangle$ e elementos $w \in \langle G,G\rangle$, é congruente a um produto $\pi$ de termos $\langle a,a'\rangle$, $\langle b,b'\rangle$, $\langle a,b\rangle$ e $\langle b,a\rangle$.

Agora tome cada termo $\langle b,b'\rangle$ em $\pi$ e o comute para a direita (começando com o mais a direita e procedendo um de cada vez) usando (2.9), (2.10) e (2.11). Assim para um elemento arbitrário $w \in \langle G,G\rangle$, $w \sim \pi \sim \pi'\beta$ com $\beta$ um produto de temos $\langle b,b'\rangle$ e $\pi'$ um produto de temos da forma $\langle a,a'\rangle$, $\langle a,b\rangle$ e $\langle b,a\rangle$. Agora tome cada termo da forma $\langle a,a'\rangle$ em $\pi'$ e comute para a esquerda usando os equivalentes da propriedades (2.9), (2.10) (obtidos apartir da inversão dos termos e trocando $a$ por $b$); assim temos $w \sim \pi\beta \sim \alpha\pi''\beta$, com $\pi''$ tendo termos $\langle a,b\rangle$ e $\langle b,a\rangle$ e $\alpha$ um produto de temos $\langle a,a'\rangle$. Trocando cada $\langle b,a\rangle$ em $\pi''$ por $\langle a,b\rangle^{-1}$ trocando $\pi''$ por $\mu \in M$.

Agora seja $w \in Z(G)$, isto é, $[w] = 1$. Então $[\alpha][\mu][\beta] = [w] = 1$, e projetando em $A$ vemos que $\mu = 1 \in M \subset \langle G,G\rangle$. Para concluirmos isso, seja $\mu$ escrito como uma palavra reduzida no grupo liver $M$, $\mu = \langle a_1,b_1\rangle^{\varepsilon_1}\dots\langle a_p,b_p\rangle^{\varepsilon_p}$, com $\varepsilon_i = \pm 1,\ a_i \neq 1 \neq b_i$. Então por indução em $p$, vemos que $[\mu]$ pode ser escrito como uma palavra reduzida no produto livre $G = A * B$ em que as duas ultimas entradas são $b_P^{-1}a_p^{-1}$ se $\varepsilon_p = -1$ ou $a_p^{-1}b_p^{-1}$ se $\varepsilon = +1$. Em particular $[\mu] \neq 1$ e $\mu$ não é uma palavra vazia.

Assim, $\mu = 1$ implica $w \sim \alpha\mu\beta = \alpha\beta$, onde $[\alpha] = 1$ e $[\beta] = 1$, que mostra que $H(G) = i_*H(A)j_*H(B)$. $\square$

Podemos mostrar que $\langle G,G\rangle$ é um grupo que é o produto de $A$, $M$ e $\beta$ usando somente o fato que $G$ é gerado por $A$ e $B$. Aplicando ao produto direto $G = A \times B$ vemos que $H(G)$ é o produto de grupos $i_*H(A)j_*H(B)$ e $\tau(A \otimes B)$, onde $\tau$ é um homomorfismo do produto tensorial $A \otimes B$ em $H(G)$ definido por $\tau(a \otimes b)$ ser a imagem em $H(G)$ de $\langle a,b\rangle$. O fato que $\tau$ é um homomorfismo bem definido segue do fato que $H(G)$ é abeliano, a congruencia

**Teorema 2.2.** Existe um homomorfismo canônico entre $H(G)$ e $H_2(G,J)$ preservando a noção de homomorfismo induzido; se $G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H(G) & \xrightarrow{h_*} & H(G') \\ \wr\| & & \wr\| \\ H_2(G,J) & \xrightarrow{h_*} & H_2(G',J) \end{array}$$

*Demonstração.* Suponha que $G$ seja dado como um grupo quociente de um grupo $E$ por um subgrupo central $N$ de $E$. O homomorfismo $\eta : E \longrightarrow G$ com kernel $N$. Definimos um homomorfismo $\langle G,G\rangle \longrightarrow E$ por $\langle x,y\rangle \longmapsto [\bar{x},\bar{y}]$, onde $\eta(\bar{x}) = x$ e $\eta(\bar{y}) = y$, isto independe da escolha de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ pos $N$ esta no centro de $E$. Este homomorfismo leva $Z(G)$ em $N \cap [E,E]$ e leva $B(G)$ em $1$, e assim induz um homomorfismo $\phi : H(G) \longrightarrow N \cap [E,E]$. Temos que a sequencia $H(E) \xrightarrow{\eta_*} H(G) \xrightarrow{\phi} N \cap [E,E]$ é exata em $H(G)$, isto é $ker(\phi) = Im(\eta_*)$.

Se $G$ é um grupo, vamos representar $G$ como o quociente de um grupo livre $F$ por um subgrupo $R$, $G = F/R$. Sendo $F^0 = F/[F,R]$ e $R^0 = R/[F,R]$ temos, $F \xrightarrow{\lambda} F^0 \xrightarrow{\eta} G$ e $R \xrightarrow{h_*} R^0$ com $R \subset F$, $R^0 \subset F^0$ e $[F,R] \subset R$, onde $\lambda$ e $\eta$ são os homomorfismos dos fatores. $R^0$ esta no centro de $F^0$, assim $\phi$ aplica $H(G)$ em $R^0 \cap [F^0,F^0]$. Examinando a sequencia $H(F^0) \longrightarrow H(G) \longrightarrow R^0 \cap [F^0,F^0]$, $\phi$ é injetivo desde que $\eta_* = 0$. Para ver isto, seja $w = \langle x_1,y_1\rangle \cdots \langle x_p,y_p\rangle \in Z(F^0)$. Então $[w] = [\bar{x}_1,y_1] \cdots [x_p,y_p] = 1 \in F^0$, e, escolha $\bar{x}_i,\bar{y}_i \in F$ tal que $\lambda(\bar{x}_i) = x_i$ e $\lambda(\bar{y}_i) = y_i$, e temos $\overline{w} = \langle x_1,\bar{y}_1\rangle \cdots \langle \bar{x}_p,\bar{y}_p\rangle$, com $\lambda[\overline{w}] = [w] = 1$, e dai $[\overline{w}] \in [F,R]$. Portanto $[\overline{w}] = [f_1,r_1] \cdots [f_q,r_q]$, para $f_i \in F$ e $r_i \in R$. Entretanto $F$ é livre, $H(F) = 1$ e $B(F) = Z(F)$. Dai $\overline{w} \sim \langle f_1,r_1\rangle \cdots \langle f_q,r_q\rangle mod B(F)$. Então $\eta_\# w = \eta_\# \lambda_\# \overline{w} \sim \eta_\# \lambda_\# (\langle f_1,r_1\rangle \cdots \langle f_q,r_q\rangle) \sim \langle \eta\lambda f_1,1\rangle \cdots \langle \eta\lambda f_q,1\rangle \sim 1$, e $\eta_* = 0$ Assim $\phi : H(G) \simeq R^0 \cap [F^0,F^0]$. Entretanto $R^0 \cap [F^0,F^0] = R \cap [F,F]/[F,R]$ é a construção de Hops para $H_2(G,J)$, de modo que temos construído o isomorfismo desejado. □

## 3 Conclusões

Com este trabalho será possível dar uma interpretação teórica para o segundo grupo de homologia $H_2(G,J)$ de um grupo $G$ finitamente apresentado, ou seja, $H_2(G,J) \simeq H(G)$ o grupo associado de grupo $G$. Além disso, concluímos que o grupo associado de grupo livre é um grupo trivial.

## Referências

[1] R. JOSHUA - *An algorithm for low dimensional group homology*, Homology, Homotopy and applications, 46, 480–509 (1945).

[2] J.J. ROTMAN - *Notes on Homological Algebra*, University of Illinois, Urbana, 1970.

[3] ROBINSON, D.J.S. - *A course in the theory of groups*, Second Edition, Springer, New York, 1995.

[4] N. JACOBSON - *Basic Algebra II*, Second Edition, Dover, New York, (1989).

[5] C. MILLER - *O Segundo Grupo de Homologia de um Grupo; Relações entre Comutadores*, American Mathematical Society, 4, 588–595 (1952).