Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Caíke da Rocha **DAMKE**; Edcarlos Domingos da **SILVA**

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: caikedamke@gmail.com; edcarlos@mat.ufg.br

Palavras chaves: Problema de Dirichlet; Solução Positiva; Teorema do Passo da Montanha; Assintoticamente Linear.

1 Introdução

Nosso trabalho busca estudar a existência e multiplicidade de soluções positivas para o seguinte problema de Dirichlet assintoticamente linear

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u(x)), \quad em\ \Omega. \\ u &= 0, \qquad\qquad sobre\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, para $N \geq 3$, é um aberto limitado com fronteira regular e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

$\mathbf{(H1)} f \in C(\Omega \times \mathbb{R});\ f(x,0) = 0,\ \forall x \in \Omega;\ f(x,t) \geq 0,\ \forall t \geq 0,\ x \in \Omega$ e $f(x,t) \equiv 0,$ $\forall t \leq 0,\ x \in \Omega$;

$\mathbf{(H2)} \dfrac{f(x,t)}{t}$ é não-decrescente com respeito a $t \geq 0$, $\forall x \in \Omega$;

$\mathbf{(H3)} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = \mu;\ \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = l$ uniformemente $\forall x \in \Omega$, onde $\mu \in [0, +\infty),\ l \in (0, +\infty]$ são constantes e $\mu < \lambda_1 \leq l$ e λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Para garantir a existência e multiplicidade de soluções necessitamos verificar que o funcional energia relacionado ao problema

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \tag{1.2}$$

onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds$, satisfaz a condição de Palais-Smale, a ser descrita abaixo. Além disso, devemos garantir que (1.2) possua a geometria do Passo da Montanha e obtendo a existência de solução do problema (1.1).

2 Resultados e Discussão

Primeiramente, começaremos com algumas definições básicas.

Definição 2.1. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma derivada fraca de u, se

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx \tag{2.3}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Neste caso, denotamos $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e dizemos que u é fracamente diferenciável se todas as derivadas fracas de primeira ordem de u definem funções em $L^1_{loc}(\Omega)$ e vale (2.3).

Considere o seguinte espaço de funções

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : u \in L^2(\Omega) \ e \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., N \right\}$$

chamado de espaço de Sobolev. Definimos também $W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \cap W^{1,2}(\Omega)$.

Agora, temos suporte para definir o que vem a ser solução fraca do problema (1.1).

Definição 2.2. Dizemos que uma função $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, onde $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, é solução fraca para o problema (1.1), se

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u) \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \tag{2.4}$$

Obter uma solução fraca do problema (1.1) é equivalente a encontrar um ponto crítico não-nulo do funcional J que é de classe C^1. Este resultado pode ser obtido em [1], capítulo 5.

Necessitamos, agora, introduzir o Teorema do Passo da Montanha, mas para isto definiremos sequência de Palais-Smale e de Cerami e quando um funcional satisfaz a condição de Palais-Smale e de Cerami.

Seja $\mathbf{H}$ um espaço de Hilbert. Então definimos:

Definição 2.3. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $\mathbf{H}$. Dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale, ou simplismente (PS), em $\mathbf{H}$ se $\{J(u_n)\}$ é limitado e $J'(u_n) \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$. Se $J(u_n) \longrightarrow c$, então a (PS)-sequência é denotada por $(PS)_c$-sequência. Analogamente, dizemos que uma sequência $\{u_n\}$ em $\mathbf{H}$ é uma sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ se

$$J(u_n) \xrightarrow{n \to \infty} c \ \ e \ \ (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\|_{\mathbf{H}^*} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Considere $J : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1.

Definição 2.4. Diz-se que o funcional J satisfaz a condição (PS), respectivamente $(PS)_c$, em $\mathbf{H}$, se para toda (PS)-sequência, respectivamente $(PS)_c$-sequência, possui uma subsequência convergente na norma. E dizemos que J satisfaz a condição de Cerami se para toda sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente na norma.

O Teorema do Passo da Montanha necessita que o funcional (1.2) satisfaça duas condições descritas a seguir.

(PM-1) $J \in C^1(\mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbb{R}),\ J(0) = 0$ e $\exists r, \rho > 0$ tais que

$$J(u) \geq \rho,\ \forall u \in S_r = \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \|u\| = r\}$$

(PM-2) $\exists e \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > r$ tal que $J(e) \leq 0$.

Dizemos que quando um funcional satisfaz (PM-1) e (PM-2) ele possui a geometria do Passo da Montanha. Além disso, denote por Γ o conjunto de todos os caminhos que ligam $u = 0$ e $u = e$, isto é,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathbf{H}_0^1(\Omega))\ :\ \gamma(0) = 0\ e\ \gamma(1) = e\}.$$

Claramente $\Gamma \neq \varnothing$, pois $\gamma(t) = te$ é tal que $\gamma \in \Gamma$. Considere,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max\{J(\gamma(t)) : t \in [0,1]\} \geq \rho > 0. \tag{2.5}$$

onde ρ é obtido da condição **(PM-1)**.

O resultado a seguir nos garante que o valor c, dado por (2.5), é um valor crítico para o funcional em questão.

Teorema 2.1. [Passo da Montanha] Suponha que J satisfaça as condições (PM-1) e (PM-2) e que J satisfaz $(PS)_c$, onde c é dado por (2.5). Então c é um valor crítico para J, ou seja, existe $z \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, não-nulo, tal que $J(z) = c$ e $J'(z) = 0$.

Demonstração: Veja [1], capítulo 5, página 118.

Enunciaremos uma condição imposta ao nosso funcional, chamada de Condição de Cerami. Para maiores detalhes veja [7].

Proposição 2.1. [Existência de uma sequência de Cerami] Suponha que J dado por (1.2) satisfaça

$$\max\{J(0), J(e)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=r} J(u)$$

para algum $\alpha < \beta$, $r > 0$ e $e \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > r$. Seja $c \geq \beta$ dado por (2.5). Então existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} c \geq \beta \quad e \quad (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\|_{\mathbf{H}_0^{-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Introduziremos dois lemas técnicos, que juntamente com a Proposição 2.1, nos ajudam na demonstração do nosso resultado principal.

Lema 2.1. Seja $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada ao autovalor λ_1 do problema $(-\Delta, \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ normalizada e suponha que vale $(\mathbf{H1})$, $(\mathbf{H2})$ e $(\mathbf{H3})$. Então o funcional J satisfaz a geometria do Passo da Montanha da seguinte maneira:

1. Existem $r, \beta > 0$ tais que $J(u) \geq \beta, \ \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ com $\|u\| = r$

2. $J(t\varphi_1) \xrightarrow{t\to+\infty} -\infty$ se $l \in (\lambda_1, +\infty]$, onde l é obtido em $(\mathbf{H3})$.

Lema 2.2. Seja J dado por (1.2) tal que

$$\langle J'(u_n), u_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Então existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ao qual denotaremos igualmente por $\{u_n\}$, tal que

$$J(tu_n) \leq \frac{(1+t^2)}{2n} + J(u_n), \ \forall t > 0 \ e \ n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente enunciaremos o resultado principal do nosso trabalho que nos fornece em quais condições o problema (1.1) possui solução.

Teorema 2.2. Se as condições $(\mathbf{H1})$, $(\mathbf{H2})$ e $(\mathbf{H3})$ são satisfeitas, então

1. O problema (1.1) não possui solução se $l < \lambda_1$;

2. Se $\lambda_1 < l < +\infty$, então o problema (1.1) possui uma solução positiva;

3. Suponha que $l = \lambda_1$ (neste caso, dizemos que o problema (1.1) é ressonante). O problema (1.1) possui uma solução positiva $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ se, e só se, existe algum $a > 0$ tal que $u(x) = a\varphi_1$ e $f(x, u) = \lambda_1 u(x)$.

Demonstrações dos Lemas 2.1, 2.2 e do Teorema 2.2 são obtidas no artigo [7].

3 Conclusões

Concluímos que o resultado acima, Teorema 2.2, nos fornece condições boas para obtenção de uma solução positiva para o problema de Dirichlet assintoticamente linear (1.1), pois não precisamos impor na função f a seguinte condição:

(A-R) para algum $\theta > 2$ e $M > 0$, então $0 < \theta F(x,s) \leq f(x,s)s$, q.t.p. $x \in \Omega$ e $|s| \geq M$. conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Esta condição implica facilmente a condição (PS) (veja [1], capítulo 5). Entretanto, para problemas assintoticamente lineares a condição **(A-R)** não é aplicável. Neste caso, vemos que $(\mathbf{H1})$, $(\mathbf{H2})$ e $(\mathbf{H3})$ são cruciais para obtermos a condição de Cerami, obtida na Proposição 2.1.

Referências

[1] Ambrosetti, A and Malchiodi, A - *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] Ambrosetti, A and Rabinowitz, P. H. - *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., 14, 349-381, 1973.

[3] Brezis, H. - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[4] de Figueiredo, D. G. - *Positive solutions os semilinear elliptic problems*, Lecture Notes in Math., 957, Springer, Berlin-New York, 1982.

[5] Liu, S., Tang, C. L. and Wu, X. P. - *Multiplicity of nontrivial solutions of semilinear elliptic equantions*, JMAA, 249 ,289-299, 2000.

[6] Wu, X. P. and Tang, C. L. - *Remarks on existence and multiplicity os solutions for a class of semilinear elliptic equations*, JMAA, 319, 369-376, 2006.

[7] Zhou H. S. - *Existence of asymptotically linear Dirichlet problem*, Nonlinear Analysis, 44, 909-918, 2001.