Séries de Hilbert de algumas álgebras associadas a grafos em níveis via cohomologia de conjuntos parcialmente ordenados

Reis, Bruno Trindade; **Serconek**, Shirlei

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: bruno.treis@hotmail.com; shirlei@mat.ufg.br

Palavras chaves: Séries de Hilbert, grafos em níveis, homologia.

1 Introdução

Fatorações de polinômios não-comutativos desempenham um importante papel em muitas áreas da matemática. Para todo grafo orientado podemos associar uma álgebra que tem como geradores as arestas do grafo e cujas relações são definidas por todos os pares de caminhos com mesma origem e mesmo final. Tais álgebras estão relacionadas com a fatoração de polinômios em variáveis não-comutativas, trabalho de pesquisa iniciado por I. M. Gelfand e V. Retakh no início da década de 90.

2 Preliminares

Sejam V um espaço vetorial e A um conjunto. Suponha que para cada $a \in A$ existe um subespaço

$$V_a \subseteq V$$

tal que

$$V = \bigoplus_{a \in A} V_a$$

Então dizemos que V é um espaço vetorial A-graduado. Note que a definição permite alguns dos V_a ser (0).

Definição 2.1. Suponha que V é um espaço vetorial A-graduado, e que existe uma aplicação

$$+ : A \times A \to A$$
$$(a, b) \mapsto a + b$$

Suponha também que V é uma álgebra, isto é, existe um produto F-bilinear

$$V \times V \to V$$
$$(v, w) \mapsto vw$$

Se

$$V_a V_b \subseteq V_{a+b}$$

para todo $a, b \in A$, então dizemos que V é uma álgebra A-graduada.

Assuma agora que V é um espaço vetorial $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduado, e que cada V_i tem dimensão finita. Definimos a *série de Hilbert* de V, $h(V, t)$, por

$$h(V, t) = \sum_{i \geq 0} (dim(V_i))t^i$$

3 Homologia de conjuntos parcialmente ordenados

Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Uma i-cadeia em P é uma $(i+1)$-upla

$$\mathsf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_i)$$

de elementos de P com

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_i$$

Dizemos que $u \in P$ cobre $v \in P$ (e escrevemos $v \prec u$) se $v < u$ e não existe nenhum elemento entre u e v. Se P é finito, denote $l(P)$ o comprimento maximal de uma cadeia em P.

Seja F um corpo e P um conjunto parcialmente ordenado finito. Se $i \geq -1$, denote por $C_i(P; F)$ o F-módulo livre no conjunto de i-cadeias x de P. O conjunto vazio é uma (-1)-cadeia, assim identificamos $C_{-1}(P : F)$ com F. Coloque $C_n(P : F) = 0$ para $n < -1$.

Se $\mathsf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_i)$ é uma i-cadeia e $0 \leq l \leq i$, definimos $g^l(\mathsf{x})$ sendo a $(i-1)$-cadeia

$$(x_0, \ldots, \widehat{x_l}, \ldots, x_i)$$

Onde $\widehat{x_l}$ significa que x_l foi omitido.

Definimos a aplicação $d_i : C_i(P; F) \to C_{i-1}(P; F)$, extendendo linearmente

$$d_i(\mathsf{x}) = \sum_{l=0}^{i}(-1)^l g^l(\mathsf{x})$$

quando i-cadeias existem, e $d_i = 0$ caso contrário.

É fácil ver que, para todo i, $d_i d_{i+1} = 0$, isto é, $Im \;\; d_{i+1} \subseteq Ker \;\; d_i$. Assim podemos definir os *grupos de homologia de ordem reduzida* de P com coeficientes em F:

$$H_i(P; F) = Ker \;\; d_i / Im \;\; d_{i+1}$$

Note que $H_i(P; F) = (0)$ para $i < -1$ e $i > l(P)$.

Seja $C^i(P; F)$ o espaço vetorial dual de $C_i(P; F)$. Para cada i-cadeia x, seja x^* o elemento da base dual de $C^i(P; F)$, isto é,

$$\mathsf{x}^* : C_i(P; F) \to F$$
$$\mathsf{x}^*(\mathsf{y}) = \delta_{\mathsf{x},\mathsf{y}}$$

para toda i-cadeia y.

Seja ∂^i a aplicação dual de d_i, isto é,

$$\partial^i : C^{i-1}(P; F) \to C^i(P; F)$$
$$f \mapsto \partial^i(f)$$

onde para uma i-cadeia x, $\partial^i f(\mathsf{x}) = f(d_i(\mathsf{x})) = \sum_{l=0}^{i}(-1)^l f(x_0, \ldots, \widehat{x_l}, \ldots, x_i)$.

Pela definição de ∂^i, vemos que $\partial^{i+1}\partial^i = 0$. Logo podemos definir os *grupos de cohomologia*

$$H^i(P; F) = Ker \;\; \partial^{i+1} / Im \;\; \partial^i$$

4 Álgebras associadas a grafos uniformes

Seja $\Gamma = (V, E)$ um grafo orientado, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. Para todo $e \in E$, denotamos por $t(e)$ a parte inicial de e e $h(e)$ a parte final de e. Um caminho π em Γ é uma sequência de arestas $\pi = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ tal que $h(e_i) = t(e_{i+1})$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Chamamos $t(e_1)$ de parte inicial de π e denotamos por $t(\pi)$; e chamamos $h(e_k)$ de parte final de π e denotamos por $h(\pi)$.

Assumimos agora que $V = \bigcup_{i=0}^{N} V_i$. Chamamos N o tamanho do grafo e se $v \in V_i$, dizemos que i é o nível de v e escrevemos $|v| = i$. Chamamos Γ de um grafo em níveis se $|t(e)| = |h(e)| + 1$ para toda aresta $e \in E$. Em um grafo em níveis, colocamos $E_i = \{e \in E | t(e) \in V_i\}$.

Para todo grafo orientado $\Gamma = (E, V)$ existe um conjunto parcialmente ordenado correspondente. Os elementos do conjunto parcialmente ordenado são os vértices $v \in V$. Dizemos que $u > v$ se e somente se existe um caminho orientado de u a v. Por um abuso de notação, denotaremos o conjunto parcialmente ordenado correspondente ao grafo com a mesma letra Γ. Portanto, podemos falar de homologias e cohomologias de um grafo orientado.

Dizemos que dois vértices v, v' de um mesmo nível $i > 0$ estão conectados por uma sequência *down-up*, se existem vértices $v = v_0, v_1, \ldots, v_k = v' \in V_i$ e $w_1, w_2, \ldots, w_k \in V_{i-1}$ tais que $w_j < v_{j-1}$ e $w_j < v_j$ para $j = 1, 2, \ldots, k$. Por exemplo, para $k = 2$ temos

$$\begin{tikzcd}
v = v_0 \arrow[dr] & & v_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & v_2 = v' \arrow[dl] \\
& w_1 & & w_2 &
\end{tikzcd}$$

Um grafo em níveis Γ é dito *uniforme* se para quaisquer pares de arestas $e, e' \in E$ com $t(e) = t(e')$, suas partes finais $h(e), h(e')$ estão conectadas por uma sequência *down-up* $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $v_i < t(e)$, $i = 0, \ldots, k$.

Se Γ é um grafo em níveis, $a \in V$, e $i \leq |a|$, definimos $\Gamma_{a,i}$ sendo o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices

$$\{w \in V \mid a > w \ \ e \ \ |a| - |w| \leq i - 1\}$$

A álgebra $A(\Gamma)$ associada a um grafo em níveis $\Gamma = (V, E)$, é a algebra gerada sobre um corpo F por geradores $e \in E$, sujeita às seguintes relações. Para quaisquer dois caminhos $\pi = (e_1, \ldots, e_k)$ e $\pi' = (f_1, \ldots, f_k)$ com a mesma parte inicial e mesma parte final, defina as relações

$$(t - e_1) \ldots (t - e_k) = (t - f_1) \ldots (t - f_k)$$

Teorema 4.1. Seja $\Gamma = (V, E)$ um grafo em níveis uniforme com $V = \bigcup_{i=0}^{N} V_i$. Então

$$h(A(\Gamma), \tau)^{-1} = \sum_{a \in V, i \leq |a|, 0 \leq s \leq i-1} (-1)^s dim(H^{s-1}(\Gamma_{a,i}))\tau^i.$$

Usaremos esse teorema para calcular a série de Hilbert da álgebra Q_3, associada ao seguinte grafo em níveis

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{1,2\} \arrow[d] \arrow[dr] & \{1,3\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \{2,3\} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\{1\} \arrow[dr] & \{2\} \arrow[d] & \{3\} \arrow[dl] \\
 & \emptyset &
\end{tikzcd}$$

e mostraremos que

$$h(A(\Gamma), \tau)^{-1} = 1 - 7\tau + 5\tau^2 - \tau^3.$$

5 Conclusões

Apresentamos então uma interpretação homológica dos coeficientes da série de Hilbert de álgebras associadas à grafos em níveis. E além disso, ilustramos esses cálculos utilizando um grafo particular.

Referências

[1] Retakh, V., Serconek, S., Wilson, R. *Hilbert series of algebras associated to directed graphs and order homology*, arXiv:1010.6295, (2010).

[2] Retakh, V.,Serconek, S., Wilson, R. *Construction of some algebras associated to directed graphs and related to factorizations of noncommutative polynomials*, Conteporary Mathematics, vol.**442**, 201-219, (2007).

[3] Rotman, J.J. *Advanced modern algebra*, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ,(2003).