

Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial Não-abeliano de um Grupo

ANDRADE, Agenor ; OLIVEIRA, Ricardo Nunes de

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil.

E-mail: agenor_andrade@hotmail.com; ricardo@mat.ufg.br

Palavras chaves: Solubilidade; nilpotência; comutador; produto livre; produto tensorial; quadrado tensorial; GAP .

1 Introdução

Este trabalho destina-se ao estudo do artigo “On Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Group ” de Rocco [1]. O objetivo então é analisar um operador ν na classe dos grupos, que está relacionado com o quadrado tensorial não-abeliano de um grupo, onde apresentaremos algumas propriedades envolvidas com tal operador, relacionando a finitude, solubilidade ou a nilpotência de um grupo G com a finitude, solubilidade ou nilpotência, respectivamente, de $\mathcal{V}(G)$. Por fim, são estabelecidas algumas cotas para o quadrado tensorial $G \otimes G$, quando G é um p -grupo finito.

Definição 1. Sejam G e G^φ grupos isomorfos por $\varphi, g \mapsto g^\varphi$, para todo $g \in G$. Definimos o seguinte grupo:

$$\mathcal{V}(G) = \left\langle G, G^\varphi \mid [g_1, g_2]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2]^{g_3^\varphi}, \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle.$$

Nossa motivação para introduzir $\mathcal{V}(G)$ é que ele possui um subgrupo $[G, G^\varphi]$ isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$, como será visto mais adiante.

2 Resultados e Discussão

Muito útil para o estudo desse artigo, foi o seguinte subgrupos do grupo $\mathcal{V}(G)$.

$$\Delta(G) = \langle [g, g^\varphi] \mid g \in G \rangle$$

A importância deste subgrupo, é destacada na demonstração de que $\mathcal{V}(G)$ herda as propriedades de finitude, nilpotência e solubilidade do grupo G , usando o fato de que

$$\frac{\mathcal{V}(G)}{\Delta(G)} \cong \frac{\chi(G)}{R(G)}.$$

Lema 2.

$$\Delta(G) \leq \mathcal{V}(G)' \cap Z(\mathcal{V}(G)),$$

onde $\mathcal{V}(G)'$ e $Z(\mathcal{V}(G))$ são respectivamente os subgrupos derivado e o centro do grupo $\mathcal{V}(G)$.

Outro subgrupo muito importante é

$$\Upsilon(G) = [G, G^\varphi] = \langle [g, h^\varphi] | g, h \in G \rangle.$$

A importância deste subgrupo deve-se ao fato dele ser isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano do grupo G .

Os principais resultados apresentados no artigo foram:

Lema 3. Sejam g, g_1, g_2, g_3, g_4 elementos quaisquer de um grupo G . As seguintes relações são válidas em $\mathcal{V}(G)$:

1. $[g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4^\varphi]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]^\varphi};$
2. $[g_1, g_2^\varphi, g_3] = [g_1, g_2, g_3^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi, g_3^\varphi];$
3. $[g_1^\varphi, g_2, g_3] = [g_1^\varphi, g_2, g_3^\varphi] = [g_1^\varphi, g_2^\varphi, g_3];$
4. $[g, g^\varphi]$ é central em $\mathcal{V}(G)$;
5. $[g_1, g_2^\varphi][g_2, g_1^\varphi]$ é central em $\mathcal{V}(G)$;
6. $[g, g^\varphi] = 1$, para todo $g \in G'$.

Proposição 4. Seja G um π -grupo finito ou, um grupo nilpotente finito ou, um grupo solúvel. Então $\mathcal{V}(G)$ é respectivamente um π -grupo finito ou, um grupo nilpotente finito ou, um grupo solúvel.

A seguir apresentamos um dos resultados centrais obtidos por Rocco [1] em seu artigo.

Considere a aplicação τ abaixo, definida sobre os geradores de $G \otimes G$

$$\begin{aligned} \tau: \quad G \otimes G &\longrightarrow \Upsilon(G) \\ (g_1 \otimes g_2) &\longmapsto [g_1, g_2^\varphi]. \end{aligned}$$

Tal aplicação pode ser estendida à um epimorfismo de $G \otimes G$ em $\Upsilon(G)$, uma vez que, τ preserva as relações definidoras de $G \otimes G$.

Proposição 5. $\tau: G \otimes G \rightarrow \Upsilon(G)$, dada por $(g_1 \otimes g_2)^\tau = [g_1, g_2^\varphi]$ é um isomorfismo.

Proposição 6. Sejam

$$\begin{aligned} G &= G^{(1)} \supseteq G^{(2)} (= G') \supseteq \cdots \supseteq G^j \supseteq \cdots, \\ 1 &= \xi_0(G) \leq \xi_1(G) \leq \cdots \leq \xi_j(G) \leq \cdots, \\ &\text{e} \\ G &= \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_j(G) \supseteq \cdots, \end{aligned}$$

respectivamente, a série derivada, a série central superior e a série central inferior de G . Então

1. $[\xi_j(G), (G^{(j+1)})^\varphi] = 1$, para todo $j \geq 0$;
2. $[\xi_{j+1}(G), \gamma_j(G^\varphi)] \cdot [\gamma_j(G), \xi_{j+1}(G^\varphi)]$ é central em $\Upsilon(G)$, para todo $j \geq 1$;
3. $[\xi_j(G), \gamma_j(G^\varphi)]$ é central em $\mathcal{V}(G)$, para todo $j \geq 1$.

2.1 Os Resultados Principais

Lema 7.

$$\mathcal{V}(G) = (\Upsilon(G) \rtimes G) \rtimes G^\varphi.$$

Teorema 8. Para $i \geq 2$ o i -ésimo termo da série central inferior de $\mathcal{V}(G)$ é dado por

$$\gamma_i(\mathcal{V}(G)) = \gamma_i(G) \gamma_i(G^\varphi) [\gamma_{i-1}(G), G^\varphi] [G, \gamma_{i-1}(G^\varphi)],$$

onde $\gamma_i(G)$ denota o i -ésimo termo da série central inferior do grupo G .

Em particular, se G é nilpotente de classe c , então $\mathcal{V}(G)$ é nilpotente de classe no máximo $c + 1$.

Teorema 9. Para $i \geq 2$, o i -ésimo termo da série derivada de $\mathcal{V}(G)$ é dado por

$$\mathcal{V}(G)^{(i)} = G^{(i)} (G^\varphi)^{(i)} [G^{(i-1)}, (G^\varphi)^{(i-1)}],$$

onde $G^{(i)}$ denota o i -ésimo termo da série derivada de G .

Em particular, se G é um grupo solúvel de comprimento derivado l , então $\mathcal{V}(G)$ é solúvel de comprimento derivado no máximo $l + 1$.

Mudando agora o foco para p -grupos finitos, Rocco [1], obteve os seguintes resultados, referentes a um limitante para a ordem dos grupos $\mathcal{V}(G)$ e $\Upsilon(G)$ e, conseqüentemente, também para $G \otimes G$.

Lema 10. Seja G um p -grupo finito e $c \in Z(G) \cap G'$ um elemento de ordem p . Se $\Phi(G)$ denota o subgrupo de Frattini de G , então

$$|\mathcal{V}(G)| \text{ divide } p^2 \left| \frac{G}{\Phi(G)} \right| \cdot \left| \left\langle \frac{G}{\langle c \rangle} \right\rangle \right|.$$

Proposição 11. Seja G um p -grupo finito de classe (de nilpotência) 2. Então $|\Upsilon(G)|$ divide

$$|G' \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{G}{G'}| \cdot \left| \Upsilon \left(\frac{G}{G'} \right) \right|.$$

Corolário 12. Seja G um p -grupo de classe menor do que, ou igual à 2, com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m$. Então $|\Upsilon(G)|$ divide $p^{n(n-m)}$.

Por fim, Rocco apresentou um limitante para a ordem do quadrado tensorial não-abeliano de um p -grupo finito G .

Teorema 13. Seja G um p -grupo finito com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m$. Então $|\mathcal{V}(G)|$ divide $p^{n^2+2n-nm}$.

Através deste teorema que o limitante para a ordem do quadrado tensorial não-abeliano foi estipulada, mediante o seguinte corolário:

Corolário 14. Seja $|G| = p^n$, $|G'| = p^m$ e $d = d(G)$ o número minimal de geradores de G . Então

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}.$$

3 Conclusões

Os principais fatos observados (e demonstrados) no artigo proposto pelo professor Rocco são:

- G finito $\implies \mathcal{V}(G)$ finito;
- G π -grupo finito $\implies \mathcal{V}(G)$ π - grupo finito;
- G nilpotente finito $\implies \mathcal{V}(G)$ nilpotente finito , com $cl(\mathcal{V}(G)) = cl(G)$ ou $cl(\mathcal{V}(G)) = cl(G) + 1$;

- G solúvel $\implies \mathcal{V}(G)$ solúvel, com $dl(\mathcal{V}(G)) = dl(G)$ ou $dl(\mathcal{V}(G)) = dl(G) + 1$;
- $\Upsilon(G) = [G, G^\varphi] \cong G \otimes G$;
- G um p -grupo finito com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m \implies p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}$.

Referências

- [1] Rocco, Noraí. R. *On a Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Group*, Bol. Soc. Bras. Mat., 1991.
- [2] Johnson, D. L., *Presentation of groups*, Cambridge University Press, 2ª edição, 1997.
- [3] BROWN, R. and LODAY, J. L. Lyndon. *Van Kampen Theoremas for Diagrams of Spaces*, J. Topology, 1987.
- [4] Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D., *Presentation of groups in terms of generators and relations*, Interscience, 1966.
- [5] Robinson, D. J. S., *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, 2ª edição, 1995.
- [6] Rotman, J. J., *The introduction to the theory of groups*, Springer-Verlag, 4ª edição, 1994.
- [7] The GAP Group, *GAP- Groups, Algorithms and Programming*, Version 4.4.12, (2008). (<http://www.gap-system.org>).