Propriedades Geométricas das Hipersuperfícies Mínimas em Espaços de Curvatura Constante 4- dimensionais

Marcelo Bezerra Barboza[1] e Romildo da Silva Pina[2].

1 Introdução

Em geral admite-se que o estudo de superfícies mínimas teve início com Lagrange em 1760. Ele considerava uma superfície em R^3, gráfico de uma função de classe C^2, $z = f(x, y)$ Lagrange estudava o problema de determinar uma superfície, a qual teria a menor área possível dentre todas as superfícies que assume dado valor na fronteira de um conjunto aberto U do plano (com interior compacto e fronteira suave).

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0 \tag{1}$$

Esta é uma condição necessária para a solução do problema proposto por Lagrange, ou seja, $f(x, y)$ tem que satisfazer tal condição para que a superfície gerada por $f(x, y)$ em $\mathbb{R}^3$ seja chamada mínima.
Somente em 1776 que Meusnier deu uma interpretação geométrica para (1),

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \tag{2}$$

onde k_1 e k_2 denota as curvaturas principais, introduzidas inicialmente por Euler. A seguir veremos uma importante relação entre superfícies mínimas em R^3 e funções complexas, dada primeiramente por Weierstrass.

2 Objetivos:

• Fazer um estudo sobre curvas isotrópicas, superfícies adjuntas e superfícies mínimas associadas.
• Fazer um estudo da forma de representação de Enneper-Weierstrass, que nos possibilitam construir novas superfícies mínimas.
• Dar exemplos de construção de superfícies mínimas via representação de Weierstrass.
• Fazer um primeiro estudo sobre superfícies mínimas completas e com curvatura total finita em $\mathbb{R}^3$.

3 Metodologia

A metodologia utilizada neste plano de trabalho foi a seguinte:
• Análise o problema proposto;
• Levantamento da bibliografia utilizada;
• Estudo individual e reuniões semanais com o orientador.

[1]Bolsista PIBIC – CNPq, Instituto de Matemática e Estatística – UFG, barboza_m_b@yahoo.com
[2]Orientador PIBIC, Instituto de Matemática e Estatística – UFG,
Palavras-chave: Superfícies, Mínimas.

4 Resultados e Discussões

Teorema 1. *(Fórmula de Representação de Enneper-Weierstrass) Para cada superfície mínima não-planar $X(w) = (x(w), y(w), z(w)), \quad w \in \Omega$, definida num domínio simplesmente conexo Ω em $\mathbb{C}$, existe uma função holomórfica μ e uma função ν em Ω com $\mu \neq 0$ tal que $\mu\nu^2$ é holomórfica em Ω, e que*

$$\begin{aligned}
x(w) &= x_0 + Re \int_{w_0}^{w} \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)d\zeta \\
y(w) &= y_0 + Re \int_{w_0}^{w} \frac{i}{2}\mu(1+\nu^2)d\zeta \qquad (3) \\
z(w) &= z_0 + Re \int_{w_0}^{w} \mu\nu d\zeta
\end{aligned}$$

vale para w, $w_0 \in \Omega$ e $X_0 = (x_0, y_0, z_0) = X(w_0)$.
Reciprocamente, duas funções μ e ν como acima, definem por meio de 3 uma superfície mínima $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ desde que Ω seja simplesmente conexa.

Da proposiçao **??** se $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima definida num domínio simplesmente conexo, então existe uma função holomórfica $\phi : \Omega \to \mathbb{C}^3$, satisfazendo $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, tal que

$$X(w) = X(w_0) + Re \int_{w_0}^{w} \phi(\zeta)d\zeta$$

para quaisquer w, $w_0 \in \Omega$. E pelo lema podemos escrever

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}\mu(1+\nu^2), \quad \phi_3 = \mu\nu$$

onde μ é uma função holomórfica e ν uma função meromórfica em Ω com $\mu \neq 0, \ \ \nu \neq 0$ tal que $\mu\nu^2$ é holomórfica em Ω. Assim,

$$\begin{aligned}
X(w) &= X(w_0) + Re \int_{w_0}^{w} \phi(\zeta)d\zeta \\
&= (x_0, y_0, z_0) + Re \int_{w_0}^{w} \left(\frac{1}{2}\mu(1-\nu^2), \ \frac{i}{2}\mu(1+\nu^2), \ \mu\nu \right) d\zeta \\
&= \left(x_0 + Re \int_{w_0}^{w} \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)d\zeta, \ \ y_0 + Re \int_{w_0}^{w} \frac{i}{2}\mu(1+\nu^2)d\zeta, \ \ z_0 + Re \int_{w_0}^{w} \mu\nu d\zeta \right).
\end{aligned}$$

Agora, se definirmos

$$\mu := \phi_1 - i\phi_2, \quad \nu := \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$$

teremos que μ é uma função holomórfica e ν uma função meromórfica em Ω, então pelo lema, ϕ é uma função holomórfica que satisfaz $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, pela proposição **??**

$$X(w) = X(w_0) + Re \int_{w_0}^{w} \phi(\zeta)d\zeta$$

define uma superfície mínima $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Teorema Seja S uma superfície mínima completa regular em $\mathbb{R}^3$. Então

$$\int\int_S KdA\ leq 2\pi(x-k),$$

onde x é a característica de Euler de S, e k é o número de arestas. **Prova** Se a integral do teorema diverge a $-\infty$, o resultado é trivialmente assegurado. Caso contrário S tem curvatura total finita, e podemos aplicar o último teorema e o último lema estudados a S. Por virtude da relção da função g e a aplicção normal de Gauss, podemos assumir (após uma rotação no espaço, se necessário) que $g(p)$ diferente de zero, ∞ nos pontos p_j, e que os pólos de $g(p)$ são todos pólos simples. Numa vizinhança de qualquer ponto de $M = N - \{p_1, ..., p_k\}$ nós temos a representção de Weierstrass em termos de parâmetros isotérmicos s. Como notamos anteriormente, sobre uma mudança de parâmetros $s(\zeta)$ que seja conforme, as funções $\phi_k(\zeta)$ satisfazem $\phi_k(\zeta) = \phi_k \frac{ds}{d\zeta}$, e de maneira análoga, $f(s)$. Isto implica que a existência de zeros para ϕ_k ou f são em um ponto, tanto quanto sua ordem, são independentes da escolha local dos parâmetros. As fórmulas de representação de Weierstrass nos dizem então que f deve ter o dobro de zeros em cada ponto que é um pólo simples de g, e f não tem outros zeros. Então, se g é de ordem m sobre N, f tem exatamente 2m zeros sobre M. Em cada ponto p_j nós podemos introduzir cooredenadas locais s de modo que $s = 0$ corresponde a p_j. Para $0 < |s| < \alpha$, nós temos $|g| < M$, desde que f é não nula. Além disso, se C é uma curva sobre M tendendo a p_j, temos por

$$\infty = \int_C \lambda|ds| = \frac{1}{2}[(|f|(1+|g|^2)|ds|] \leq \frac{1+M^2}{2}[\int_C |f||ds|].$$

Segue do Lema anterior a este Teorema, que f deve ter no máximo um pólo na origem. Do fato que as funções X_k da representção de Weierstrass são injetivas em $0 < |s| < \alpha$, e pela hipótese de que $g(p_j)$ é diferente de zero, segue facilmente que a ordem v_j do pólo p_j é no mínimo igula a 2. Assim $f(s)ds$ é uma forma diferencial meromórfica sobre N, e temos a relação de Riemann que afirma que o número de pólos menos o número de zeros é igual a 2-2G, onde G é o gênero de N. E ainda, a característica de Euler x de M é igual a 2 - 2G - k. Temos portanto,

$$(2-2G) = \sum (v_j - 2m) \leq (2k - 2m)$$

e

$$\int\int_S KdA = -4\pi m \leq 2\pi(2-2G-2k) = 2\pi(x-k)$$

.

5 Conclusão

Vimos que o estudo de superfícies mínimas vem sendo desenvolvida há quase três séculos, despertando o interesse de vários matemáticos renomados como Lagrange, Weiestrass, Meusnier, entre outros.

Mesmo sendo um assunto antigo, ainda hoje desperta interesse de vários pesquisadores em matemática e rendendo muitos artigos nesta área.

Referências

[1] BARBOSA, J. L. E COLARES, A. G., , *Minimal Surfaces in* R^3, Lecture notes in Matrh 1195(1986) Springer - Verlag

[2] CARMO, M. P. DO , *Differential Geometry of curves and Sufaces*, Prentice - Hall, 1976.

[3] OSSERMAN, R. , *A Servey of Minimal Surfaces, Dover Publicatons.*

[4] TENENBLAT, K. , *Introdução à geometria diferencial, Editora UNB, Brasilia, 1998.*