

Universidade Federal de Goiás



conpeex  
2010

ANOS

VII Congresso de Pesquisa, Ensino e Extensão  
Conhecimento e Desenvolvimento Sustentável

18 a 22 de outubro  
Câmpus Samambaia - Goiânia-Goiás

PICME



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Apoio



Realização



CONHECIMENTO SEMPRE PRESENTE

## ÍNDICE DE ALUNOS

Aluno	Trabalho
<b>BRUNO DE PAULA MIRANDA</b>	O Problema da Braquistócrona
<b>ABEL CARDOSO DOS SANTOS</b>	O Problema de Riemann para Sistemas de Leis de Conservação
<b>CLEVERSON EZEQUIEL SILVA SOBRINHO</b>	Relatório Parcial de Estudos
<b>ÉDER SILVA DE BRITO</b>	Conceitos Básicos de Cadeias de Markov
<b>FÁBIO JÚNIOR CHAVEIRO DE SOUZA</b>	Alguns Aspectos da Geometria Diferencial: curvas e superfícies parametrizadas.
<b>GABRIELA CRISTINA SANTOS SILVA</b>	Análise digital da porosidade de pacotes granulares
<b>ELLEN CAROLINE SILVÉRIO VIEIRA</b>	Construção dos Números Reais
<b>FERNANDO HENRIQUE DE BRITO VAZ</b>	Tópicos de Geometria Diferencial - Superfícies Mínimas
<b>GUSTAVO LIMA FRANCO</b>	Estudo de análise real
<b>JOSÉ ITAMAR MENDES DE SOUZA JÚNIOR</b>	Métodos indiretos para resolver sistemas lineares
<b>MATHEUS LEVÍ PARANAGUÁ PINHEIRO</b>	Um par de superfícies isométricas
<b>MILTON DE OLIVEIRA ASSUNÇÃO JUNIOR</b>	Estudo de análise real e álgebra linear - PICME
<b>MURILO ZANOTTO</b>	Conceitos e Aplicações de Álgebra Linear
<b>RAFAEL ALVARENGA DE SOUZA</b>	Códigos Corretores de Erros Lineares - Codificação
<b>RAFAEL SOBRINHO MENDANHA</b>	O Problema de Dirichlet
<b>RAISSA KARENINE FERNANDES</b>	Curiosidades sobre funções reais
<b>RODRIGO GONÇALVES TREVISAN</b>	Equações diferenciais, teoria e aplicações

## O PROBLEMA DE DIRICHLET <sup>1</sup>

**MENDANHA**, Rafael Sobrinho, e-mail: rafaelmendanha\_@hotmail.com

Orientador: **da SILVA**, Edcarlos D., e-mail: edcarlos@mat.ufg.br

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística

**Palavras-chave:** Problema de Dirichlet, Equação de Laplace, Séries de Fourier.

### 1 Introdução

Apresentaremos problema de Dirichlet para a equação de Laplace no retângulo e no círculo. Estes problemas são resolvidos usando *Séries de Fourier* e o *Método de Fourier*.

A equação de Laplace é dada por

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

onde  $\Omega$  é uma região do plano. Funções que satisfazem a equação de Laplace são chamadas de funções harmônicas, por exemplo,  $u(x, y) = x^2 - y^2$  é harmônica em todo plano.

O problema de Dirichlet pode ser definido, para equação de Laplace, como:

**Definição 1.1** Seja  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua dada, o problema de Dirichlet consiste em encontrar uma função  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = f \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

A função  $f$  representa a condição de fronteira do problema.

Temos ainda que se existir solução para o problema de Dirichlet, ela será única, ver [1], Teorema 7.2, p.248.

### 2 Metodologia

O projeto foi realizado com estudo individual e encontros semanais com o orientador.

<sup>1</sup>Revisado por: Edcarlos Domingos da Silva

### 3 Resultados e discussão

Nesta seção apresentaremos o Problema de Dirichlet no retângulo e no círculo.

#### 3.1 Problema de Dirichlet no Retângulo

Seja  $\Omega$  uma região retangular denotada por  $\mathcal{R}$ , igual a  $(0, a) \times (0, b)$ . A região  $\Omega$  é limitada por quatro segmentos. Daremos nossa condição de fronteira  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por quatro funções contínuas, uma em cada lado de  $\mathcal{R}$ , representadas por

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad u(x, b) = f_1(x), \quad u(0, y) = g_0(y) \quad \text{e} \quad u(a, y) = g_1(y). \quad (3)$$

Para garantir a continuidade da função  $f$  sobre  $\partial\Omega$ , temos que exigir condições de compatibilidade entre as equações em (3), de modo que  $f$  não seja descontínua nas extremidades dos segmentos que compõem os domínios das funções em (3). Essas condições de compatibilidade podem ser dadas por

$$f_0(a) = g_1(0), \quad f_0(0) = g_0(0), \quad f_1(a) = g_1(b) \quad \text{e} \quad f_1(0) = g_0(b). \quad (4)$$

A ideia de se resolver o problema de Dirichlet no retângulo é dividi-lo em quatro partes. Cada parte da resolução do problema consistiria em tomar uma função que compõem a condição de fronteira (3) e considerar as outras três funções como nulas. Depois disto a solução total do problema seria dada pela soma das soluções obtidas em cada etapa. Logo temos que resolver o problema de Dirichlet com as seguintes condições

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0. \quad (5)$$

Procuraremos candidatos a  $u$  na forma  $u(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ . Aplicando a equação anterior na equação de Laplace obtemos

$$-\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \sigma, \quad (6)$$

onde  $\sigma$  é uma constante, pois os membros da expressão anterior são iguais independente de  $x$  e  $y$ . A expressão (6) representa duas equações diferenciais ordinárias (EDO), lembramos que elas devem obedecer as condições de fronteira (5):

$$u(x, b) = \varphi(x) \cdot \psi(b) = 0 \Rightarrow \psi(b) = 0, \quad (7)$$

porque não podemos ter  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x$ , pois nos levaria a  $u(x, y) = 0$  para todo

$x$  e  $y$ . Das demais condições de (5) ainda obtemos

$$u(0, y) = \varphi(0) \cdot \psi(y) \Rightarrow \psi(y) = 0 \quad \text{e} \quad u(a, y) = \varphi(a) \cdot \psi(y) \Rightarrow \varphi(a) = 0. \quad (8)$$

Resolvendo as equações diferenciais em(6) com suas respectivas condições obtidas em (7) e (8), temos que suas respectivas soluções são as seguintes autofunções

$$\varphi_n(x) = \gamma_n \text{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad \psi_n(y) = B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \text{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}.$$

A função  $u(x, y)$  será igual a soma infinita das autofunções  $u_n(x, y) = \varphi_n(x) \cdot \psi_n(y)$  que pode ser representada por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \cdot e^{-\frac{n\pi b}{a}} \text{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}. \quad (9)$$

Para determinar os coeficientes  $\alpha_n$  devemos aplicar  $u(x, 0) = f(x)$  de nossa condição de fronteira (5), com cálculo simples, chegaremos a expressão final para  $u$  representada por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \cdot \text{senh} \frac{n\pi(y-b)}{a}}{\text{senh} \frac{-n\pi b}{a}}, \quad (10)$$

cujos coeficientes  $c_n$  podem ser determinados por

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (11)$$

Temos que, se  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  for derivável até terceira ordem, com  $f(0) = f(a) = 0$ , a solução do problema de Dirichlet no retângulo, com a condição de fronteira (5), é dada por (10) e seus coeficientes  $c_n$  são dados pela expressão (11).

### 3.2 Problema de Dirichlet no Círculo

A região  $\Omega$  do problema de Dirichlet no disco é dada por  $D_p = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ , onde  $\rho$  é o raio do disco centrado na origem. Para resolver nosso problema utilizaremos coordenadas polares, tomemos  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \text{sen} \theta$ , onde  $0 \leq \theta < 2\pi$  e  $0 \leq r < \rho$ . Fazendo  $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \text{sen} \theta)$ , obtemos a equação de Laplace em coordenadas polares

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Conforme a Definição 1.1, utilizando coordenadas polares, o Problema de Dirichlet

no Círculo consiste em:

**Definição 3.1** dada uma função contínua  $f(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , devemos encontrar função  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que:

1.  $\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$
2.  $v(r, \theta + 2\pi) = v(r, \theta)$
3.  $v(\rho, \theta) = f(\theta)$
4.  $v$  de classe  $C^2$  em  $0 < r < \rho$ .

Procuraremos candidatos a  $v$  na forma  $v(r, \theta) = \phi(\theta) \cdot \psi(r)$ , que substituídos na equação de Laplace encontraremos

$$\frac{r^2 \psi''(r) + r \psi'(r)}{\psi(r)} = - \frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)},$$

os dois membros da equação anterior são iguais independente de  $\theta$  e  $r$ , portanto, os membros desta equação devem ser funções constante, que pode ser denotada por  $\sigma$ , onde  $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\frac{r^2 \psi''(r) + r \psi'(r)}{\psi(r)} = \sigma \quad \text{e} \quad - \frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)} = \sigma. \quad (12)$$

Resolvendo a equação dependente de  $\theta$  em (12), acrescida da condição  $\phi(\theta + 2\pi) = \phi(\theta)$ , obtida da Definição 3.1, temos  $\phi(\theta)$  é dada por autofunções

$$\phi_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \text{sen}(n\theta). \quad (13)$$

Resolvendo a equação em (12) dependente de  $r$  obtemos a seguintes soluções

$$\psi(r) = \ln(r) \cdot C + C_1, \quad \psi_n(r) = r^n \quad \text{e} \quad \psi(r) = r^{-n}. \quad (14)$$

Encontramos soluções candidatas a  $\psi(r)$ , mas note que as funções  $\psi(r) = r^{-n}$  e  $\psi(r) = \ln(r) \cdot C + C_1$  são descontínuas em  $r = 0$ . Este fato geraria uma descontinuidade em  $v(r, \theta)$ , mas isso não deve ocorrer, pois admitimos que  $v$  é uma função contínua em todo  $\bar{\Omega}$ . Portanto a única solução de  $\psi_n(r)$  é

$$\psi_n(r) = r^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Resolvemos nossas EDO's, descobrimos que suas respectivas soluções são autofunções representadas pelas expressões (13) e (15), logo, a função  $v(r, \theta)$  será também uma autofunção dada por

$$v_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \text{sen} n\theta), \quad n \in \mathbb{N},$$

consequentemente podemos escrever o candidato a  $v(r, \theta)$  como

$$v(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta). \quad (16)$$

Determinamos os coeficientes  $A_0$ ,  $A_n$  e  $B_n$  da expressão anterior impondo a condição de fronteira  $v(\rho, \theta) = f(\theta)$ , sendo eles expressos como

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha, \quad A_n = \frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \quad \text{e} \quad B_n = \frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha d\alpha. \quad (17)$$

Se  $f(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , for uma função contínua, com  $f(0) = f(2\pi)$ , então expressão (16), com seus respectivos coeficientes definidos em (17), é solução do Problema de Dirichlet definido em 3.1.

Além disso, se  $r < \rho$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , podemos expressar  $v = v(r, \theta)$  através da fórmula de Poisson, representada por

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} \right] f(\alpha) d\alpha. \quad (18)$$

## 4 Conclusões

Apresentamos o Problema de Dirichlet em duas regiões simples para as quais explicitamos as suas respectivas soluções. Para regiões arbitrárias este problema torna-se não trivial. Uma característica importante que podemos enfatizar do Problema de Dirichlet é a sua unicidade tendo em vista o princípio do máximo.

## Referências

- [1] FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 4<sup>o</sup>. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Projeto Euclides).
- [2] IORIO, V. de M. *EDP, Um curso de graduação*. 2<sup>o</sup>. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. (Matemática Universitária).
- [3] BOYCE, William E. e DIPRIMA, Richard C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 6<sup>o</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

Instituto Federal de Goiás  
Unidade Jataí

## Conceitos e Aplicações de Álgebra Linear

ZANOTTO, Murilo<sup>1</sup>; ELIAS, Luciana A<sup>2</sup>

1- Bolsista CNPq/OBMEP, aluno do IFG/Jataí - [murilo\\_rv@hotmail.com](mailto:murilo_rv@hotmail.com)

2- Orientadora, professora do CAJ/UFG – [lucianaeliasmat@gmail.com](mailto:lucianaeliasmat@gmail.com)

Palavras chaves: Álgebra Linear, Espaço Vetorial, Produto Interno, Aplicações

### Introdução

A Álgebra Linear se apresenta como uma importante ferramenta na tabulação, organização e expressão de resultados em problemas aplicados. O domínio dos conceitos teóricos principais deste assunto possibilita ao conhecedor um amplo espaço de aplicações em problemas teóricos ou vinculados a questões práticas.

O Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICMe) proporciona ao medalhista o confronto entre a linguagem muitas vezes lúdica do ensino médio para a linguagem matemática.

Este rigor, na maioria das vezes é preterido pelo conhecimento prático e a habilidade de sistematizar problemas, bem como resolve los. Expressar na linguagem matemática superior.

Ao mesmo tempo implementamos tal linguagem na abordagem do problema concreto nas áreas de aritmética, Engenharia, Probabilidade e outros, pois em nosso caso, o aluno é vinculado a um curso da área de Engenharia e suas expectativas são nesse período, fazer uso dos conhecimentos que são implementados em sua instituição de ensino.

## Definições

### Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial real é um conjunto  $V$  não vazio, com duas operações:

soma  $V \times V \rightarrow V$ , ou seja dados  $u$  e  $v$  pertencentes a  $V$ ,  $u+v$  também pertence a  $V$ , e produto por um escalar  $R \times V \rightarrow V$ , dado um “ $a$ ” pertencente aos números reais,  $a.u$  também pertence a  $V$ . Tais que para qualquer  $u, v$  e  $w$  pertencentes a  $V$  e  $a, b$  pertencentes aos Reais, sejam satisfeitas as propriedades. (Os elementos de  $V$  são chamados de vetores)

i)  $(u + v) + w = u + (v + w)$

ii)  $u + v = v + u$

iii) existe  $0$  pertencente a  $V$  tal que  $u + 0 = u$ , ( $0$  é chamado de vetor nulo)

iv) existe  $-u$  pertencente a  $V$  tal que  $u + (-u) = 0$

v)  $a \cdot (u + v) = a.u + a.v$

vi)  $(a + b) v = a.v + b.v$

vii)  $(a.b).v = a.(b.v)$

viii)  $1.u = u$

### Transformações Lineares

Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de  $V$  em  $W$ ,  $F:V \rightarrow W$ , que satisfaz as seguintes condições:

i) quaisquer  $u$  e  $v$  em  $V$ ,  $F(u + v) = F(u) + F(v)$

ii) quaisquer  $k$  em um corpo de escalares e  $v$  pertencente a  $V$ ,  $F(kv) = kF(v)$

## Produto Interno

Seja  $V$  um espaço vetorial real. Um produto interno sobre  $V$  é uma função que a cada par de vetores  $v$  e  $v'$  pertencentes a  $V$ , associa um número real denotado  $\langle v; v' \rangle$ , de modo que sejam válidas as seguintes propriedades para quaisquer  $u, u', v, v'$  pertencentes a  $V$  e  $a$  pertencente aos reais.

- i) (positividade)  $\langle v ; v \rangle \geq 0$  para todo vetor  $v$  e  $\langle v ; v \rangle = 0$  se, e somente se  $v = 0$
- ii) (bilinearidade)  $\langle a.v ; v' \rangle = a.\langle v ; v' \rangle$
- iii) (bilinearidade)  $\langle u + u' ; v \rangle = \langle u ; v \rangle + \langle u' ; v \rangle$
- iv) (comutatividade)  $\langle u ; v \rangle = \langle v ; u \rangle$

## Metodologia

Fizemos encontros semanais para sanar dúvidas, determinar novos passos a serem dados, tendo por base o material bibliográfico utilizado. Fomos apresentando os problemas a serem confrontados pela técnica e pelo rigor matemático. Tais encontros consistiam, portanto, seminários, arguições e resolução de problemas aplicados. [1] [2] [3] [4]

## Conclusões

Os programas de pós graduação em Matemática seja pura ou aplicada exigem de seus candidatos um bom conhecimento de Álgebra Linear. O aluno que não fez/faz matemática tende a pouco se importar com o linguagem e as perguntas inerentes a formalização de seus textos.

Para o bolsista graduando em outras sub áreas do conhecimento é importante ajustar os conceitos e os rigores solicitados aos bons programas de pós graduação *Stricto Senso*. Ao mesmo tempo aproveitamos as atividades desenvolvidas no curso de graduação que hora está inserido. Em que tais conceitos são utilizados nos cursos de tecnologia.

A Álgebra Linear é uma ferramenta muito aplicativa, tanto no contexto da matemática pura quanto na matemática aplicada. Acreditamos que este entendimento tem dado bons frutos.

## As aplicações

As aplicações dos nossos estudos são usadas principalmente nas matérias do curso de engenharia elétrica

### **Equações Diferenciais**

usando auto-vetores e auto-valores, para achar a solução de equações

### **Resolução de circuitos elétricos**

-onde através do circuito, você pode montar uma matriz  $[E]=[R]x[I]$  e assim achar a corrente "I" em qualquer ponto do circuito.

[E]= matriz das tensões

[R]= matriz das resistências

[I]= matriz das correntes

Cadeia de Markov

-principalmente usado em estatística [4]

## Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq e a OBMEP o apoio desprendido.

Agradecemos a UFG pela orientação

1

## Referências Bibliográficas

[1] BOLDRINI, J. L. et al, Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

[2] HERSTEIN, I. N. Topics in Álgebra. 2. ed. Chicago: John Wiley & Sons, 1976.  
p.273-336.

[3] LIMA, E. L. Álgebra Linear. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

[4] POOLE, D. Álgebra Linear. 1. ed. São Paulo: Thomson, 2004.

---

1 Revisado por: Luciana Aparecida Elias

## Construção dos Números Reais

Autor: **VIEIRA**, Ellen Caroline Silvério

([ec.sv@hotmail.com](mailto:ec.sv@hotmail.com))

Orientador: **SOUZA**, Mário José de

([mariojsouza@mat.ufg.br](mailto:mariojsouza@mat.ufg.br))

Instituto de Matemática e Estatística - IME

Palavras chave: sequências de Cauchy, números reais.

### Introdução

Em meados do Século XVI, matemáticos começaram a trabalhar com séries infinitas e limites, e logo após houve necessidade de fundamentar o Cálculo Diferencial e Integral e no século XVIII a intenção era precisar a noção de limite. Somente no início do Século XIX Cauchy entendeu claramente que a fundamentação do Cálculo dependia de se tornar preciso o conceito de número real. Nesta época Cauchy, Weierstrass e mais tarde Dedekind apresentaram processos de construção dos números reais. Contudo, nesse período já se construía muitos números, inclusive, valores numéricos para as funções logarítmicas e trigonométricas, que juntamente com os radicais tinham um grande número de valores não racionais. Em geral, estas funções eram definidas por série de potências, isto é, seus valores eram obtidos como limite de sequências. A ideia de Cauchy foi caracterizar as sequências convergentes e definir o número real como sendo a classe de todas as sequências que convergem para ele. Desta maneira este trabalho objetiva a construção dos números reais por meio das sequências de Cauchy.

### Metodologia

O trabalho foi dividido em duas etapas, a primeira voltada para a fundamentação teórica (Análise na Reta), e a segunda destinada ao estudo das sequências de Cauchy e construção dos números reais.

### Resultados e discussão

Revisado por: Mário José de Souza

## 1. Sequências de números racionais

Segundo LIMA (página 100) uma função  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , onde  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos naturais e  $\mathbb{Q}$  o dos racionais, é chamada uma sequência de números racionais. Então, quando  $n$  é um número natural,  $s(n)$  é um certo número racional que também costuma ser indicado por  $s_n$  e chamado o *termo de ordem*  $n$ , ou *n-ésimo termo* da sequência.

Uma sequência de números racionais  $s_n$  é dita limitada quando existem dois números racionais  $p, q$  tais que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \leq s_n \leq q$ .

Uma sequência  $a_n$  é dita crescente se, para todo número natural  $j$   $a_j \leq a_{j+1}$ . A sequência  $b_n$  é chamada decrescente se, para todo número natural  $j$   $b_{j+1} \leq b_j$ .

## 2. Pares de Cauchy

Dizemos que duas sequências  $a_n$  e  $b_n$  de números racionais formam nessa ordem o par de Cauchy  $\{a_n, b_n\}$  se as seguintes condições estão verificadas:

- 1)  $a_n$  é crescente;  $b_n$  é decrescente;
- 2) Para todo  $n \in \mathbb{N}$  :  $a_n \leq b_n$ ;
- 3) Dado qualquer número racional  $\varepsilon > 0$  existe um número natural  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $b_n - a_n < \varepsilon$ .

Dado o par de Cauchy  $\{a_n, b_n\}$  e o número racional  $r$ , nós dizemos que  $\{a_n, b_n\}$  determina  $r$  se para todo  $n \in \mathbb{N}$ :  $a_n \leq r \leq b_n$ .

Conforme ALVARENGA (páginas 4 a 8) é possível mostrar as seguintes propriedades:

- i) Se um par de Cauchy determinar um número racional, este será único.
- ii) Nem todo par de Cauchy determina um número racional  $r$ , conforme a definição acima.
- iii) É possível que dois pares de Cauchy diferentes determinem o mesmo número racional  $r$ , se ele existir.
- iv) Um par de Cauchy pode determinar no máximo um número racional. Mas um número racional pode ser determinado por muitos pares de Cauchy diferentes.

## 3. Comparação de Pares de Cauchy

Revisado por: Mário José de Souza

Dados dois pares de Cauchy  $\{a_n, b_n\}$  e  $\{c_n, d_n\}$  dizemos que  $\{a_n, b_n\}$  é estritamente menor do que  $\{c_n, d_n\}$ , e escrevemos  $\{a_n, b_n\} < \{c_n, d_n\}$ , se existir algum índice  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $b_{n_0} < c_{n_0}$ .

Dado dois pares de Cauchy  $\{a_n, b_n\}$  e  $\{c_n, d_n\}$ , quando  $\{a_n, b_n\} < \{c_n, d_n\}$  dizemos que  $\{c_n, d_n\}$  é estritamente maior do que  $\{a_n, b_n\}$  e escrevemos  $\{c_n, d_n\} > \{a_n, b_n\}$ .

Dados dois pares de Cauchy  $\{a_n, b_n\}$ ,  $\{c_n, d_n\}$ , suponhamos que existe um número racional  $r$  tal que  $a_n \leq r \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (isto é,  $\{a_n, b_n\}$  determina o número  $r$ ). Suponhamos ainda que  $\{a_n, b_n\}$  não é nem estritamente maior nem estritamente menor do que  $\{c_n, d_n\}$ , então  $\{c_n, d_n\}$  determina o mesmo número racional  $r$ .

Demonstração: Como  $\{a_n, b_n\}$  não é estritamente menor que  $\{c_n, d_n\}$ , temos que para todo  $n \in \mathbb{N}$   $\{c_n \leq b_n\}$  (\*), como  $\{a_n, b_n\}$  não é estritamente menor que  $\{c_n, d_n\}$ , temos que  $\{a_n \leq d_n\}$  (\*\*). Se, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n \leq r \leq d_n$  fosse falsa teríamos:

$$1) c_n > r;$$

$$2) d_n < r;$$

1) Se  $c_n > r$ , temos que  $c_n - r > 0$  e para  $n > n_0 \implies c_n - r \geq c_{n_0} - r > 0$ . Como  $\{a_n, b_n\}$  é um par de Cauchy, existe  $n_1 > n_0$ , tal que, para todo  $n \geq n_1$ :  $b_n - a_n < c_{n_0} - r \implies b_n - a_n < c_n - r$ .  $n \geq n_1 \implies b_n - c_n < a_n - r$ , mas por (\*)  $b_n - c_n \geq 0 \implies a_n - r > 0$ , para todo  $n \geq n_1$ , absurdo ( $a_n \leq r$ ).

2) Esta demonstração se dá da mesma maneira que o item anterior.

Dados dois pares de Cauchy  $\{a_n, b_n\}$  e  $\{c_n, d_n\}$ , dizemos que  $\{a_n, b_n\}$  é equivalente a  $\{c_n, d_n\}$  e escrevemos  $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$  se  $\{a_n, b_n\}$  não é nem estritamente maior nem estritamente menor que  $\{c_n, d_n\}$ .

#### 4. Adição de Pares de Cauchy

Dados dois pares de Cauchy  $\alpha = \{a_n, b_n\}$  e  $\beta = \{c_n, d_n\}$ , podemos formar o par de Cauchy  $\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$ , que chamaremos de soma dos pares de Cauchy  $\alpha$  e  $\beta$  e escreveremos  $\{a_n, b_n\} + \{c_n, d_n\} = \{a_n + c_n, b_n + d_n\}$ .

Sejam  $r, s$  números racionais e  $\{a_n, b_n\}$  um par de Cauchy que determina  $r$ , e  $\{c_n, d_n\}$  um par de Cauchy que determina  $s$ . É fácil perceber que a soma dos pares de Cauchy  $\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$  é um par de Cauchy que determina  $r + s$ .

Vamos indicar com  $\hat{O}$  o par de Cauchy  $\{e_n, f_n\}$  tal que  $e_n = f_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado o par de Cauchy  $\alpha = \{a_n, b_n\}$ , podemos formar o par de Cauchy  $-\alpha = \{-b_n, -a_n\}$ , que chamaremos de simétrico de  $\alpha$ .

## 5. Multiplicação de Pares de Cauchy

Definição: Se  $\alpha = \{a_n, b_n\}$  e  $\beta = \{c_n, d_n\}$  são pares de Cauchy tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > 0$  e  $c_n > 0$  então chamamos de produto de  $\alpha$  por  $\beta$  o par de Cauchy  $\{a_n c_n, b_n d_n\}$  e escrevemos:

$$\{a_n, b_n\} \times \{c_n, d_n\} = \{a_n c_n, b_n d_n\}$$

Sejam  $r, s$  números racionais positivos,  $\{a_n, b_n\}$  um par de Cauchy que determina  $r$  e  $\{c_n, d_n\}$  um par de Cauchy que determina  $s$ . Suponhamos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > 0$  e  $c_n > 0$ . É de fácil verificação que  $\{a_n c_n, b_n d_n\}$  é um par de Cauchy que determina  $r \cdot s$  e  $\{1/b_n, 1/a_n\}$  é um par de Cauchy que determina  $1/r$ .

Seja  $\{a_n, b_n\}$  um par de Cauchy estritamente maior que o par de Cauchy  $\hat{O}$ . Então existe um par de Cauchy  $\{a_{n_0}, b_{n_0}\}$  tal que  $\{a_n, b_n\} \sim \{a_{n_0}, b_{n_0}\}$  e  $a_{n_0} > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Vamos escolher o índice  $n_0$  de tal modo que  $a_{n_0}$  seja o primeiro termo maior do que zero na sequência  $a_n$  (isto é,  $a_{n_0} > 0$  e  $a_j < 0$ , para  $j < n_0$ ). Diremos então que  $\{a_{n_0}, b_{n_0}\}$  é o par de Cauchy associado a  $\{a_n, b_n\}$ .

Definição: Sejam  $\{a_n, b_n\}, \{c_n, d_n\}$  pares de Cauchy estritamente maiores do que  $\hat{O}$ . Seja  $\{a_{n_0}, b_{n_0}\}$  o par associado a  $\{a_n, b_n\}$  e  $\{c_{n_0}, d_{n_0}\}$  o par associado a  $\{c_n, d_n\}$ . (Sabemos então que  $a_{n_0} > 0$  e  $c_{n_0} > 0$  para todo  $n$  e  $\{a_n, b_n\} \sim \{a_{n_0}, b_{n_0}\}$ ,  $\{c_n, d_n\} \sim \{c_{n_0}, d_{n_0}\}$ ) colocamos por definição:

$$\{a_n, b_n\} \times \{c_n, d_n\} = \{a_{n_0} c_{n_0}, b_{n_0} d_{n_0}\}$$

## 6. Os números Reais

Seja  $\mathbb{Q}$  o conjunto dos números racionais. Sabemos que  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  é o conjunto dos pares ordenados de números racionais, isto é:  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q} \text{ e } b \in \mathbb{Q}\}$ . Ora, as funções  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  formam um conjunto que chamaremos de  $\mathbf{A}$ .

Que é um elemento de  $\mathbf{A}$ ? Um elemento de  $\mathbf{A}$  é uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  que pode ser pensada como um par de sequências de números racionais  $\{a_n, b_n\}$ . Em particular um par de Cauchy pertence a  $\mathbf{A}$ , isto é, os pares de Cauchy formam um subconjunto de  $\mathbf{A}$ .

Revisado por: Mário José de Souza

Dado um par de Cauchy  $\alpha$ , vamos juntar num conjunto  $\alpha^*$  todos os pares de Cauchy equivalentes a  $\alpha$ . Isto é,  $\alpha^* = \{\alpha' \in \Delta \mid \alpha' \sim \alpha\}$ . Diremos que  $\alpha^*$  é o número real determinado pelo par de Cauchy  $\alpha$ . O par de Cauchy  $\alpha$  é então chamado um representante do número real  $\alpha^*$ . É fácil verificar que  $\alpha \sim \beta \implies \alpha^* = \beta^*$ .

Chamamos de  $\mathbb{R}$  o conjunto de todos os números reais.

## Conclusão

Durante a realização deste trabalho foi possível perceber que a construção dos números reais, na época de Cauchy, era uma necessidade e que nos dias atuais os números reais fazem parte de diversas áreas do conhecimento (engenharia, química, física, entre outras). Tivemos também a oportunidade de observar vários métodos de construção dos números reais. Deste modo esse métodos proporcionaram um melhor entendimento do conjunto dos números reais e sua construção. O método que escolhemos foi o das sequências de Cauchy. Acreditamos que nosso principal objetivo foi atingido.

## Referências Bibliográficas

ALLAN, N.D. Decimais Infinitos. Disponível em:

<[http://www.rc.unesp.br/igce/metemática/nelo/Decimais\\_infinitos.doc](http://www.rc.unesp.br/igce/metemática/nelo/Decimais_infinitos.doc)>. Acesso em: 04 set. 2010.

ALVARENGA, C.W.M. Construção dos Números Reais. Brasília: Universidade de Brasília – Departamento de Matemática, 2001. 29p.

LIMA, E.L. Curso de Análise; v.1. 12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008. 431p.

**Título:** Curiosidades sobre funções reais.

**Autores:** FERNANDES, Raissa Karenine; LEMES, Max Valério.

**Endereço eletrônico:** karenine\_rpt@hotmail.com; max@mat.ufg.br.

**Unidade Acadêmica:** UnUCET-UEG/Anápolis; IME-UFG.

**Palavras-chave:** Conjunto de Cantor, Teste M de Weierstrass, Conjunto de medida nula.

## Introdução

Quando pensamos em funções reais, geralmente pensamos em funções bem comportadas, ou seja, contínuas e deriváveis sempre que preciso. Além disso, lembramos daqueles exemplos aparentemente estranhos são apenas exemplos ou contraexemplos de “alguma propriedade” sem nenhuma utilidade prática. Esse trabalho visa desmentir essa visão, mostrando que o universo das funções reais é bem diversificado com funções com propriedades bastante interessantes e bem diversificadas e que exemplos aparentemente artificiais possuem aplicações interessantes em problemas elementares.

## Material e Método (Metodologia)

Foram utilizados livros, artigos e encontros semanais com o orientador.

## Resultados e Discussão

Intuitivamente temos a visão que uma função contínua é uma função cujo gráfico pode ser desenhado “sem tirar o lápis do papel”. Certamente, com essa ideia, lembramos rapidamente de várias funções contínuas básicas, como por exemplo: a reta, os polinômios, as funções trigonométricas, a exponencial, a logarítmica entre outras. Entretanto, devemos sempre considerar o domínio da função antes de falar de continuidade.

**Definição 1:** *Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X$ . Diz-se que  $f$  é contínua em  $a$  quando se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  sempre que  $|x - a| < \delta$ . A função  $f$  é dita contínua quando for contínua em todos os pontos do seu domínio.*

*Segue imediatamente da definição que qualquer função é contínua nos pontos isolados de seu domínio. Por exemplo, toda função  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua porque o conjunto  $\mathbb{Z}$  é discreto, ou seja, todos os seus pontos são isolados.*

Revisado por: Max Valério Lemes

Sabemos que o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são densos na reta, isto é, qualquer intervalo aberto da reta contém números racionais e números irracionais. Vejamos agora que a função de Dirichlet  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua em toda a reta. De fato, se  $a \in \mathbb{R}$  é irracional, como o conjunto dos números racionais é denso na reta, para todo  $\delta > 0$  existe um número racional  $y \in (a - \delta, a + \delta)$  tal que  $|f(y) - f(a)| > \frac{1}{2}$ . Logo,  $f$  não é contínua em  $a$ . Analogamente, mostramos que  $f$  não pode ser contínua nos racionais.

O conjunto de Cantor é construído do seguinte modo: dividimos o intervalo  $[0,1]$  em três partes iguais e retiramos o intervalo do meio  $A_{11} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . O que nos deixa com dois intervalos fechados  $F_{11}$  e  $F_{12}$ , em cada um deles repetimos a mesma operação, removendo os intervalos (abertos) do meio  $A_{21}$  e  $A_{22}$ . Com isto, teremos quatro intervalos fechados  $F_{21}, F_{22}, F_{23}$  e  $F_{24}$ . Repetimos este procedimento indefinidamente. O conjunto  $K$  de Cantor é o conjunto dos pontos não removidos, ou seja,  $K$  é o conjunto que obtemos ao retirar de  $[0,1]$  o conjunto aberto

$$A = \cup \{A_{ij}, j = 1, \dots, 2^{i-1}, i = 1, 2, \dots\}.$$

O conjunto de Cantor é um conjunto compacto, não enumerável, com medida nula. Considere agora  $C: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida da seguinte forma  $C(0) = 0, C(1) = 1$ . Para  $x \in A_{ij}$ ,  $C(x) = \frac{2j-1}{2^i}$ . Deste modo,  $C$  está bem definida em  $[0,1] - K$ . Além disso, o conjunto  $D = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots\}$  é denso em  $[0,1]$ . Com isto, dado  $x \in K$  existe o limite de  $C(y)$  quando  $y$  tende a  $x$ , logo podemos definir  $C(x) = \lim_{y \rightarrow x} C(y)$ . Definida assim a função  $C$  é contínua em  $[0,1]$ ,  $C$  é a chamada *escada de Cantor*.

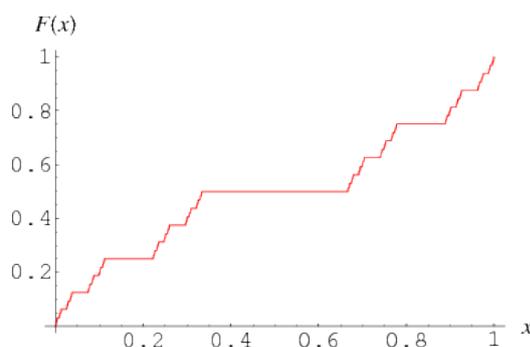


Gráfico da escada de Cantor

A escada de Cantor é contínua, não constante, monótona (não decrescente) e sua derivada é nula exceto num conjunto de medida nula (o próprio  $K$ ). Entretanto, a escada de Cantor não é estritamente crescente. É possível construir uma função contínua, estritamente crescente, valendo 0 em 0 e 1 em 1, mas cuja derivada é nula sempre que estiver definida (o que ocorre em quase todo ponto). Neste caso, o conjunto dos pontos onde a função não é derivável será denso, não enumerável, apesar de ter medida nula. A primeira vista, estas funções são estranhas e artificiais, levando a crer que não possuem aplicações. Mostraremos que nem sempre é assim.

**Problema:** Um jogador inveterado precisa de uma grande soma de dinheiro, digamos  $a$ , para quitar uma dívida de jogo antiga. Ele reúne todas as suas economias,  $xa$  (com  $x < 1$  é claro) e decide jogar no Cassino de Cantor, onde em todos os jogos o apostador que ganhar recebe o valor apostado em dobro. A probabilidade de ganhar cada aposta é  $p$  (por se tratar de um cassino, devemos esperar que  $p < \frac{1}{2}$ ). Como nosso jogador é experiente, ele usa a seguinte técnica de apostas: quando o total de seu capital for menor que  $\frac{a}{2}$  ele apostará tudo e quando tiver mais que  $\frac{a}{2}$  aposta o suficiente para chegar a  $a$  ganhando uma única vez. Qual a probabilidade de seu sucesso?

Inicialmente, consideremos  $f_p(x)$  a probabilidade de sucesso começando com  $x$ . É claro que  $f_p(0) = 0$  e  $f_p(1) = 1$ . Se  $x < \frac{1}{2}$  segue que  $f_p(x) = pf_p(2x)$  e se  $x \geq \frac{1}{2}$  então a chance dele ganhar na primeira aposta é  $p$ , caso ele perca a primeira aposta sua chance é  $f_p(2x - 1)$ , isto é,

$$f_p(x) = \begin{cases} pf_p(2x), & \text{se } x < \frac{1}{2}; \\ p + (1 - p)f_p(2x - 1), & \text{se } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Observe que podemos calcular  $f_p(x)$  em função de  $p$  nos racionais diádicos (rationais na forma  $\frac{m}{2^n}$ , onde  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ). Por exemplo

$$f_p\left(\frac{1}{2}\right) = p, f_p\left(\frac{1}{4}\right) = p^2 \text{ e } f_p\left(\frac{3}{4}\right) = p + (1 - p)p.$$

Considere agora a diferença entre dois racionais diádicos próximos

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = \begin{cases} p\left(f_p\left(\frac{m+1}{2^{n-1}}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)\right), & \text{se } m < 2^{n-1}; \\ (1-p)\left(f_p\left(\frac{m+1-2^{n-1}}{2^{n-1}}\right) - f_p\left(\frac{m-2^{n-1}}{2^{n-1}}\right)\right), & \text{se } m \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Aplicando  $n$  vezes esta equação obtemos o valor da diferença em termos de  $p$ . Seja  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos números naturais e  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a função definida por  $F(0) = 0$ ,  $F(2m) = m$  e  $F(2m+1) = 1 + F(m)$ . Observe que  $F$  está bem definida e que podemos calcular seu valor para todo número natural  $n$ .  $F(1) = 1 + F(0) = 1$ ,  $F(2) = F(1) = 1$ ,  $F(3) = 1 + F(1) = 2$  e assim por diante. É fácil ver que  $F(m)$  é o número de 1's na expressão binária de  $m$ , por exemplo,  $2010 = (11111011010)_2$ , portanto  $F(2010) = 8$ .

Podemos provar por indução que

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = p^{n-F(m)}(1-p)^{F(m)}$$

Vamos enunciar alguns lemas para organizar nossas conclusões.

**Lema 1:** *Seja  $p$  um número real com  $0 < p \leq \frac{1}{2}$ . Existe uma única função contínua e estritamente crescente  $f_p: [0,1] \rightarrow [0,1]$  com  $f_p(0) = 0$  e  $f_p(1) = 1$  satisfazendo a seguinte identidade para quaisquer naturais  $m$  e  $n$  com  $m < 2^n$ :*

$$f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = p^{n-F(m)}(1-p)^{F(m)}$$

*Demonstração:* Da identidade acima segue que

$$f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} p^{n-F(k)}(1-p)^{F(k)}$$

Por indução mostramos que  $f_p$  está bem definida nos racionais diádicos.

Segue que  $0 < f_p\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - f_p\left(\frac{m}{2^n}\right) \leq (1-p)^n$ .

Desta estimativa podemos concluir que existe uma forma de estender continuamente (e de maneira única) a função  $f_p$  no intervalo  $[0,1]$ . Além disso, como  $f_p$  é estritamente crescente nos racionais diádicos e o conjunto dos racionais diádicos é denso em  $\mathbb{R}$  temos que  $f_p$  é estritamente crescente.

De agora em diante usaremos a notação  $f_p$  para nos referirmos à função construída no lema acima.

Considere  $x \in [0,1]$  na base binária, isto é,  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^n}$ , onde  $\delta_n \in \{0,1\}$ .

Segue do lema anterior que

$$f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n p^{n-\sum_{j=1}^n \delta_j} (1-p)^{\sum_{j=1}^n \delta_j}$$

**Lema 2:** A função  $f_p$  satisfaz a identidade abaixo para todo  $x \in [0,1]$ :

$$f_p(x) = \begin{cases} p f_p(2x), & \text{se } x \leq \frac{1}{2}; \\ p + (1-p) f_p(2x-1), & \text{se } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Demonstração:* Demonstramos a identidade acima para os racionais diádicos por indução no expoente do denominador. A identidade vale para todo  $x$  pois  $f_p$  é contínua.

Segue deste lema que  $f_p$  descreve a probabilidade de nosso jogador ser bem sucedido se ele seguir a estratégia proposta. Pode-se mostrar que a estratégia utilizada é a melhor possível, isto é, se o jogador seguir qualquer outra estratégia sua probabilidade de ganhar será no máximo  $f_p$ . Além disso, pode-se mostrar que  $f_p$  é derivável quase sempre em  $[0,1]$  e que a derivada é zero nos pontos onde está definida.

## Conclusões

Vimos que funções construídas analiticamente, cujo gráfico sequer podemos visualizar, possuem aplicações bastante interessantes.

## Referências Bibliográficas

- ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. *Análise matemática para licenciatura*. Edgard Blücher (2001).
- C.G.T.A. Moreira, N.C. Saldanha e G. Svetlichny. *O Cassino de Cantor*. Revista Matemática Universitária, 28 (2000), 67-76.
- LIMA, Elon Lages. *Análise Real, Volume 1*. IMPA (1989).
- LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. IMPA (1976).
- W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, third edition (1976).

**Título:** Códigos Corretores de Erros Lineares – Codificação

**Autores:** **SOUZA**, Rafael Alvarenga de; **SILVA**, Gabriela Cristina Santos; **SILVA**, Élida Alves da; **SILVA**, Fernando Kennedy da;

**Unidade Acadêmica:** Universidade Federal de Goiás - *Campus Catalão*

**Endereço eletrônico:** rafaelalvarengadesouza@gmail.com; elida.alves@ig.com.br; gabrielacssilva@gmail.com; kennedy.fernando@gmail.com;

**Palavras-chave:** Código corretor de erros; transmissão de dados; códigos lineares.

## Introdução

A teoria de códigos corretores de erros está presente no nosso dia-a-dia, mesmo que este fato não seja evidente. Ela está presente em ocasiões que fazemos uso de informações digitalizadas, tais como assistir a um programa de televisão, ou mandar um recado para alguém via *pager*.

Ao desenvolver este tema observa-se uma mesclagem de conceitos e técnicas de Álgebra abstrata e aplicações imediatas na vida real, o que demonstra que a sofisticação tecnológica torna cada vez mais difusa a fronteira entre a Matemática pura e Matemática aplicada.

A teoria dos códigos corretores de erros é utilizada sempre que é necessário transmitir ou armazenar dados garantindo a sua confiabilidade. Em essência, utilizam-se técnicas que permitem a inserção de dados adicionais a cada informação a ser transmitida ou armazenada de modo que, ao se recuperar a informação, seja possível detectar e corrigir erros.

## Material e Método (Metodologia)

Foram utilizados livros e internet para pesquisas e encontros semanais com a orientadora.

## Resultados e Discussão

Inicialmente, introduziremos um exemplo simples, mas importante para ilustrar os princípios da teoria de códigos corretores de erros.

Consideremos um robô, que se move sobre um tabuleiro quadriculado, conforme uma lista de quatro comandos

Revisado por: Élida Alves da Silva

Leste → 00  
 Oeste → 01  
 Norte → 10  
 Sul → 11

As palavras acima são denominadas palavras código da fonte. Entretanto, trabalhar apenas com o código fonte é arriscado, porque qualquer interferência na transmissão dos dados pode ocasionar um erro. Por exemplo, suponhamos que foi enviada a sequência 10 para que o robô se mova para Norte. Se devido a ruídos na transmissão for recebida a sequência 11 o robô se moverá para Sul. Para evitar erros como estes e/ou corrigi-los é necessário recodificar as palavras, de modo a introduzir redundâncias. Um exemplo de recodificação é:

00 → 00000  
 01 → 01011  
 10 → 10110  
 11 → 11101

onde as duas primeiras posições reproduzem o código fonte, enquanto que as três posições restantes são as redundâncias introduzidas. Essas novas palavras são chamadas palavras código do canal.

Este procedimento facilita a detecção de erros. A palavra transmitida, provavelmente, será a que tem o menor número de componentes diferentes da palavra recebida. Por exemplo, suponha que ocorra um erro no envio de uma palavra e seja recebida a sequência 11110. Comparando-a com as palavras do código, verifica-se que provavelmente a palavra transmitida foi 10110, pois é a que possui menor número de dígitos distintos..

Para a construção de códigos corretores de erros deve-se determinar o conjunto  $A$  que será utilizado como alfabeto. As sequências finitas de símbolos do alfabeto serão chamadas palavras. O comprimento de uma palavra é o número de componentes que possui. Caso as palavras de um código possuam comprimento  $n$ , diremos que o código tem comprimento  $n$ .

**Definição 1:** Um código de comprimento  $n$  é um subconjunto qualquer de palavras de  $A^n$ .

Note que, no exemplo do robô,  $A = \{0, 1\}$ ,  $n = 5$  e o código é  $C = \{00000, 01011, 10110, 11101\}$

A classe de códigos mais utilizada na prática é a chamada classe dos códigos lineares.

Denotaremos por  $K$  um corpo finito com  $q$  elementos tomado como alfabeto. Temos, então, para cada número natural  $n$ , um  $K$ -espaço vetorial  $K^n$  de dimensão  $n$ .

**Definição 2:** Um código  $C \subset K^n$  será chamado de código linear se for um subespaço vetorial de  $K^n$ .

Assim, o código do robô citado acima é um exemplo de código linear. Nesse caso, o alfabeto é  $A = \mathbb{F}_2$ , o corpo de Galois e o código é o subespaço vetorial de  $\mathbb{F}_2^5$ , imagem da transformação linear

$$T: \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^5$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1, x_1 + x_2, x_2)$$

Seja  $C$  um código, cuja dimensão sobre  $K$  é  $k$ . Considere  $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$  uma base ordenada de  $C$  e  $G$  a matriz cujas linhas são os vetores

$$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}), i = 1, \dots, k, \text{ isto é,}$$

$$G = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}.$$

A matriz  $G$  é chamada de matriz geradora de  $C$  associada à base  $\beta$ .

Considere a transformação linear definida por

$$T: K^k \rightarrow K^n$$

$$x \mapsto xG$$

Se  $x = (x_1, \dots, x_k)$ , temos que

$$T(x) = xG = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k,$$

logo  $T(K^k) = C$ . Podemos, então, considerar  $K^k$  como sendo o código da fonte,  $C$  o código de canal e a transformação  $T$ , uma codificação. No exemplo do robô, como  $\beta = \{v_1 = 01011, v_2 = 10110\}$  é uma base ordenada do código, a matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ é chamada matriz geradora.}$$

Além disso, como  $K^2 = \{00, 10, 01, 11\}$  temos

$$T(00) = (00) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (00000) \quad T(10) = (10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (10110),$$

$$T(01) = (01) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (01011) \quad T(11) = (11) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (11101)$$

e portanto,  $C = \{00000, 00110, 01011, 11101\}$

**Definição 3:** Diremos que uma matriz geradora  $G$  de um código está na forma padrão se tivermos  $G = (Id_k | A)$ , onde  $Id_k$  é a matriz identidade  $k \times k$  e  $A$  é uma matriz  $k \times (n-k)$ .

**Definição 4:** Seja  $C \subset K^n$  um código linear, define-se código dual como sendo

$$C^\perp = \{v \in K^n : \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in C\},$$

que também é um código linear, onde  $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ , com

$$u = (u_1, \dots, u_n) \text{ e } v = (v_1, \dots, v_n).$$

**Proposição 1:** Seja  $C \subset K^n$  um código de dimensão  $k$  com matriz geradora

$$G = (Id_k | A),$$

na forma padrão. Então,

- i)  $\dim C^\perp = n - k$
- ii)  $H = (-A^t | Id_{n-k})$  é a matriz geradora de  $C^\perp$ .

**Proposição 2:** Seja  $C$  um código linear e suponhamos que  $H$  seja uma matriz geradora de  $C^\perp$ . Temos então que

$$v \in C \Leftrightarrow Hv^t = 0.$$

A proposição 2 nos permite identificar os elementos de um código  $C$ . A matriz geradora  $H$  de  $C^\perp$  é chamada de matriz teste de paridade de  $C$ .

Para verificar se um determinado vetor  $v$  em  $K^n$  pertence ou não a um código  $C$  com matriz geradora  $G$ , é preciso verificar se o sistema de  $n$  equações com  $k$  incógnitas  $x = (x_1, \dots, x_k)$ , dado por

$$xG = v,$$

admite solução. Às vezes este procedimento, requer um custo computacional elevado. A matriz teste de paridade  $H$  permite que a solução seja encontrada por um algoritmo mais rápido.

Dados um código  $C$  com matriz teste de paridade  $H$  e um vetor  $v \in K^n$ , chamamos o vetor  $Hv^t$  de síndrome de  $v$ .

No exemplo do código do robô, é evidente que a matriz geradora  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  está na forma padrão. Pela proposição 1, concluímos que a

matriz  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  é a matriz geradora de  $C^\perp$ . Então, se

$$v_1 = (11101) \text{ e } v_2 = (01110),$$

então pela proposição 2, temos que  $v_1 \in C$  e  $v_2 \notin C$ , pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso o vetor (101) é o vetor síndrome de (01110).

## Conclusões

Abordamos, neste trabalho, alguns conceitos básicos de códigos corretores de erros lineares, exemplificando. O próximo objeto de pesquisa é a decodificação nestes códigos. O desenvolvimento deste projeto propicia uma oportunidade de evidenciar a relação estreita entre conceitos e técnicas de álgebra abstrata e aplicações imediatas na vida real.

## Referências

- [1] Chaves, Lucas M. Carvalho, Karina D de. Kinoshita, Vanessa G. **Códigos Corretores de Erros**, UFLA.
- [2] Hefez, Abramo; Villela, Maria L. T. **Códigos Corretores de Erros**, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [3] Souza, Adenilce O. **Códigos Corretores de Erros Lineares**, FAMAT em Revista, número 06, 2006.

# ANÁLISE DIGITAL DA POROSIDADE DE PACOTES GRANULARES

SILVA, Gabriela Cristina Santos<sup>1</sup>; SOUZA, Rafael Alvarenga de<sup>2</sup>; FREITAS, Sulamita Oliveira<sup>3</sup>; SILVA, Fernando Kennedy da<sup>4</sup>; SILVA, Élide Alves da<sup>5</sup>; SILVA, André Carlos<sup>6</sup>; SILVA, Elenice Maria Schons<sup>7</sup>.

Palavras-chave: porosidade, grãos, análise de imagens, empacotamento de grãos.

## INTRODUÇÃO

A porosidade é um termo referente aos espaços vazios de uma determinada matéria. Em muitas situações a medida da porcentagem de poros é fundamental para uma melhor avaliação da realidade. Seu estudo é extremamente importante, por exemplo, quando se trata de petróleo já que, para existir um reservatório, é necessária a existência de uma rocha suficientemente porosa e permeável para armazenar este fluido, além disso, tal rocha precisa estar confinada por rochas não porosas e impermeáveis, evitando o escape do petróleo.

Vários autores têm se dedicado a simular computacionalmente o problema da geração de pacotes granulares. Para isso inúmeras técnicas de simulação computacional têm sido testadas. Pode-se, contudo, destacar alguns trabalhos de reconhecida importância tais como LANGSTON et al. (1995) que utilizaram um modelo computacional baseado em elementos discretos (DE) para simular o fluxo de material granular armazenado em um silo por uma tremonha. Outros autores tais como ALLEN e TILDESLEY (1987) e RAPAPORT (2004) usaram modelos baseados em dinâmica molecular (MD) de partículas elásticas. Já LUBACHEVSKY (1991) e HERRMANN e LUDING (1998) utilizaram a simulação conduzida por eventos (EDS) para partículas rígidas.

O presente trabalho, ainda em execução, visa o desenvolvimento de um simulador capaz de gerar pacotes granulares denso, mas ainda porosos. Para a validação do

simulador foi utilizado um silo bidimensional de acrílico. Os resultados encontrados nos ensaios com o silo bidimensional estão de acordo com o previsto na literatura.

## MATERIAIS E MÉTODOS

De modo a gerar pacotes granulares densos, porém porosos, foi construído um aparato experimental composto por placas de acrílico transparentes, formando um silo bidimensional de placas planas. A designação de bidimensional se deve ao fato do material colocado no interior do silo formar uma monocamada de grãos dentro deste.

Para a montagem do silo foram cortadas duas placas de acrílico transparente de 155 x 45 x 0,5cm (largura x comprimento x espessura), para serem usadas como a parte frontal e traseira do silo. Para compor a lateral do silo foram usadas peças duas peças do mesmo acrílico com 90 x 10 x 0,3cm. Em tais peças foi cortado um encaixe circular para que a inclinação da tremonha do silo pudesse ser regulada de 0 a 90°, encaixando-se nas peças laterais sem gerar nenhuma abertura na lateral do silo. Para compor o fechamento entre as partes maiores do silo foram instaladas duas peças de 10 x 10 x 0,3cm na base do mesmo. A junção das peças de acrílico foi feita com parafusos de 0,5cm, arruelas e porcas. Para dar sustentação vertical ao silo e manter o seu ponto de descarga afastado do chão foram coladas nas peças de acrílico frontal e traseira duas peças trapezoidais, apoiadas sobre uma placa de 45 x 25 x 0,5cm. O polímero utilizado para a construção do silo foi o polimetilmetacrilato (PMMA), também denominado de acrílico ou plexiglass, foi escolhido pelo seu elevado grau de transparência. Sua fórmula molecular é  $(C_5O_2H_8)_n$ . Como material a ser usado no silo foram cortados discos de acrílico com diâmetro nominal de 2 e 4cm e espessura de 0,2cm.

Para a aquisição da imagem do silo carregado com os discos utilizou-se uma câmera digital Cyber-Shot DSC-50H fabricada pela empresa Sony. Após a captura da imagem estas passaram por um tratamento no software ThumbsPlus Pro versão 6.0 desenvolvido pela Cerious Software, onde as imagens foram rotacionadas e recortadas (quando necessário) de modo a conter apenas o silo e os discos em seu

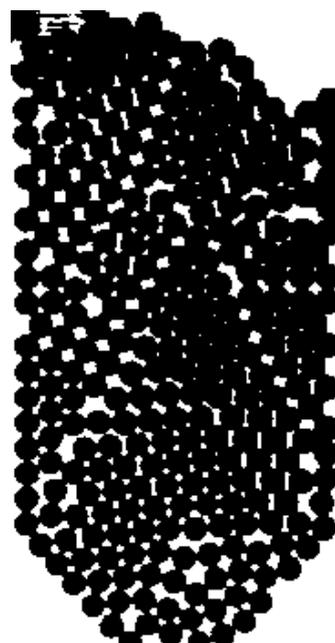
interior. Para tratar a imagem e contabilizar os poros foi usado o software proposto por Silva et alli (2007).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram realizados ensaios no silo bidimensional proposto com três inclinações diferentes da tremonha (45, 60 e 75°) para discos de acrílico de 2cm de diâmetro e com duas inclinações diferentes da tremonha (60 e 75°) para discos de acrílico de 4cm de diâmetro. A figura 1 apresenta o silo bidimensional carregado com 300 partículas de 2cm de diâmetro e inclinação da tremonha de 45° (figura 1a), bem como o resultado da análise da imagem digital usando o algoritmo proposto por Silva et alli (2007) (figura 1b). Já a figura 2 apresenta os resultados encontrados para os discos de 2cm de diâmetro e tremonha com 45°, onde variou-se a quantidade de discos dentro do silo.



(a)



(b)

Figura 1 – (a) Pacote granular gerado com discos de 2cm de diâmetro e inclinação da tremonha de 45°. (b) resultado da análise da imagem digital.

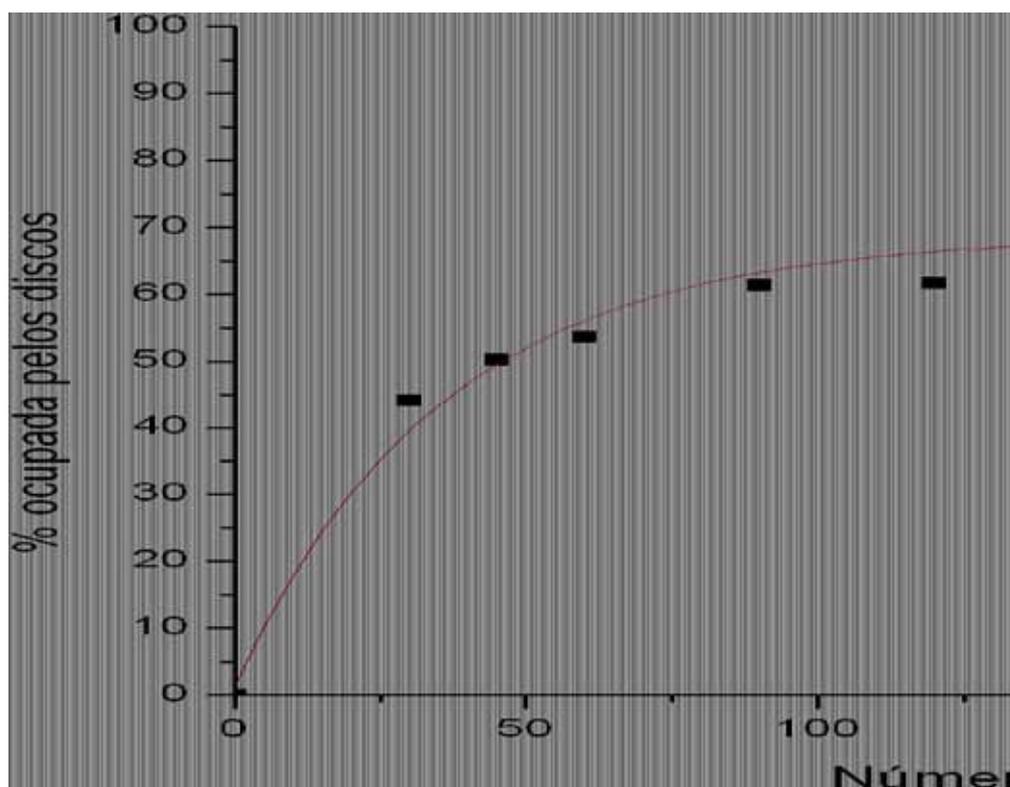


Figura 2 – Resultados obtidos para partículas de 2cm e tremonha com inclinação de 45°.

## CONCLUSÕES

A análise de imagens digitais para a determinação da porosidade de pacotes granulares se mostrou uma ferramenta viável devido à alta velocidade de processamento e acurácia do algoritmo usado. O resultado encontrado para as partículas de 2cm atendem ao esperado na literatura, mostrando que a porcentagem ocupada pelos discos cresce com o número de discos, tendendo assintoticamente a um valor máximo, que corresponde ao empacotamento máximo de discos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN M. P., TILDESLEY, D. J. **Computer Simulation of Liquids**. New York: Oxford University Press, 1987. 408 p.

DURAN, J., MAZOZI, T., LUDING, S., CLÉMENT, E., RAJCHENBACH, J. **Discontinuous decompaction of a falling sandpile**. Physical Review E, v. 53, n. 2, p. 1923–1930, 1996.

HERRMANN, H. J., LUDING, S. **Modeling granular media on the computer.** Continuum Mechanics and Thermodynamics, v. 10, n. 4, p. 189–231, 1998.

LANGSTON, P. A., TUZUN, U., HEYE, D. M. **Discrete element simulation of granular flow in 2d and 3d hoppers:** dependence of discharge rate and wall stress on particle interactions. Chemical Engineering Science, v. 50, n. 6, p. 967–987, 1995.

RAPAPORT, D. C. **The Art of Molecular Dynamics Simulation.** 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 564 p.

SILVA, A. C. **Simulação computacional da redução direta de minério de ferro em fornos Midrex.** 159 f. Tese (Doutorado em engenharia de Materiais) – Rede Temática em Engenharia de Materiais, Ouro Preto, 2010.

SILVA, A. C., BERNARDES, A. T. **Simulação computacional do escoamento de grãos em silos.** Exacta, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 157-165, 2010.

SILVA, A. C., LUZ, J. A. M., BONFIOLI, L. F. **Caracterização microestrutural de aços através de análise de imagem digital.** In: II Simpósio Mineiro de Ciências dos Materiais, 2007, Ouro Preto. Revista da Física de Ouro Preto, v.1. p. 25–26, 2007.

YANG, S. C., HSIAU, S. S. **The simulation and experimental study of granular materials discharged from a silo with the placement of inserts.** Powder Technology, v. 120, n. 3, p. 244–255, 2001.

---

1, 2 e 3 Alunos do curso de Engenharia de Minas, Campus Catalão.

4 e 5 Professores do Departamento de Matemática, Campus Catalão;

6 e 7 Professores do Departamento de Engenharia de Minas, Campus Catalão.

andre@iceb.ufop.br

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, TEORIA E APLICAÇÕES

**TREVISAN**, Rodrigo Gonçalves<sup>1</sup> ([rodrigoagronomia@hotmail.com](mailto:rodrigoagronomia@hotmail.com)); **Lee**, Yun Sheng<sup>2</sup> ([leeufmt@yahoo.com.br](mailto:leeufmt@yahoo.com.br))

1- Instituto de Ciências Agrárias e Ambientais - ICAA - UFMT.

2- Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais –ICNHS- UFMT.

Palavras Chave: Equação diferencial ordinária; solução analítica.

### INTRODUÇÃO

Uma das maiores motivações de se estudar as equações diferenciais, é a sua vasta aplicação em estudos de fenômenos físicos e biológicos. Como se pode observar, principalmente desde o século XVIII, grandes pensadores começaram a perceber a importância e as vastas aplicações desse novo ramo de estudos, dentre estes destacam-se: Brook Taylor(1685–1731), Leonhard Paul Euler (1707–1783), Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) e a família Bernoulli. Todos esses importantes atores dessa história contribuíram para o desenvolvimento de teorias que levaram ao avanço dos estudos das equações diferenciais, propiciando a otimização de muitos recursos e o desenvolvimento de várias tecnologias para a melhoria da qualidade de vida da população.

Além disso, com o advento da computação, surgiu uma nova área no estudo das equações diferenciais, a solução numérica. O Cálculo Numérico corresponde a um conjunto de ferramentas ou métodos usados para se obter a solução de problemas matemáticos de forma aproximada. Esses métodos se aplicam principalmente a problemas que não apresentam uma solução exata, portanto precisam ser resolvidos numericamente, pois embora um problema de matemática possa ser resolvido analiticamente, esse método pode se tornar impraticável com o aumento do tamanho do problema.

Este trabalho foi realizado com o objetivo de estudar métodos de resolução analítica e numérica de alguns tipos de equações diferenciais (ordinárias e parciais) que aparecem mais frequentemente e em seguida verificar algumas aplicações destas em modelagens de casos físicos e biológicos.

*Revisado por Lee Yun Sheng.*

## MATERIAL E MÉTODOS

Este estudo foi dividido em quatro partes centrais, seguindo uma ordem cronológica dos assuntos que propiciasse uma melhor compreensão geral do tema.

A primeira parte do projeto teve por finalidade realizar uma revisão bibliográfica, buscando conhecer e compreender a história da evolução do estudo das equações diferenciais. Iniciando com o desenvolvimento do Cálculo atribuído a Gottfried Wilhelm von Leibniz e a Sir Isaac Newton (CONTADOR, 2006), de uma forma um tanto quanto polêmica que permanece até os dias de hoje, e finalizando pela compreensão do que já foi desenvolvido e pelas áreas que ainda necessitam ser estudadas, revelando seu enorme potencial para várias ciências aplicadas.

A segunda etapa do trabalho foi o estudo das equações diferenciais ordinárias, em que as funções incógnitas são funções de somente uma variável, portanto as derivadas que aparecem na equação são derivadas totais (JUNIOR; LADEIRA, 2000). Nessa etapa foi feito um extenso referencial teórico, com o estudo de definições, classificação e de vários teoremas, que garantem algumas condições importantes para a existência de soluções (SODRÉ, 2003). Correspondeu também ao estudo detalhado de métodos de resolução de alguns dos vários tipos de equações diferenciais mais frequentes, soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, homogêneas e não homogêneas, equações de ordem superior e a Transformada de Laplace.

Passamos então a terceira etapa, agora com o estudo de equações diferenciais parciais, assim denominadas porque as funções incógnitas são funções que dependem de mais de uma variável. Portanto as derivadas que aparecem na equação são derivadas parciais (JUNIOR; LADEIRA, 2000).

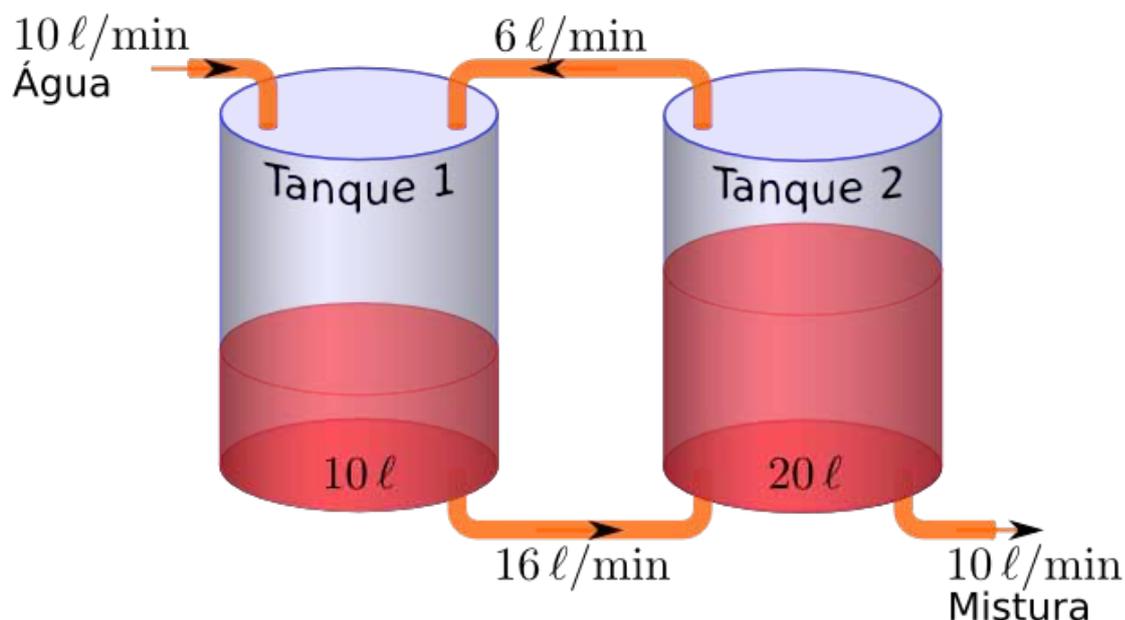
A quarta e última parte foi a concretização do conhecimento, juntando-se toda a teoria aprendida para a compreensão das aplicações na modelagem de fenômenos. Para tanto foi necessário ainda uma introdução à linguagem computacional FORTRAN 90 e o uso de métodos de solução numérica de diferentes ordens.

*Revisado por Lee Yun Sheng.*

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para expressar os resultados obtidos com esse trabalho, já que eles são em sua maioria didáticos e difíceis de mensurar, faremos a seguir a demonstração de uma aplicação a um exemplo prático. Esse exemplo é relativamente simples de ser resolvido de forma analítica, e graças a isso faremos a comparação entre os resultados obtidos de forma analítica e os encontrados pelo cálculo numérico.

Considere o exemplo a seguir: em uma indústria, dois tanques se encontram conectados conforme a ilustração abaixo.



No instante de tempo  $t = 0$ , o Tanque 1 contém 10 litros de água pura e o Tanque 2 contém 20 litros de uma mistura de água com 12 Kg de sal. Água pura está sendo constantemente bombeada para dentro do Tanque 1 a uma taxa de 10 litros por minuto, as misturas salinas são trocadas entre os dois tanques como na figura acima, e a mistura escoar do Tanque 2 a uma taxa de 10 litros por minuto. Encontre a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo  $t$ .

Solução: Podemos observar que a quantidade de água que entra e que sai de cada tanque é a mesma, dessa forma o volume dos tanques irá permanecer constante ao longo do tempo. Após relacionarmos todas as variáveis envolvidas encontramos que a equação diferencial que descreve este sistema é o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} x'_1(t) = -\frac{8}{5} x_1(t) + \frac{3}{10} x_2(t), \\ x'_2(t) = \frac{8}{5} x_1(t) - \frac{4}{5} x_2(t), \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 12 \end{cases}$$

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com os coeficientes constantes e que pode ser resolvido analiticamente usando o método do polinômio característico, que nos conduz a seguinte solução:

$$x_1(t) = \frac{9}{4} e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4} e^{-2t} \qquad x_2(t) = 9e^{-\frac{2}{5}t} + 3e^{-2t}$$

Para efeito de comparação também foi realizada a resolução numérica, partindo da discretização do problema e usando o método de Euler, calcularam-se os valores por meio da diferença atrasada usando-se três diferentes amplitudes, a fim de discutir o erro apresentado nas diferentes simulações.

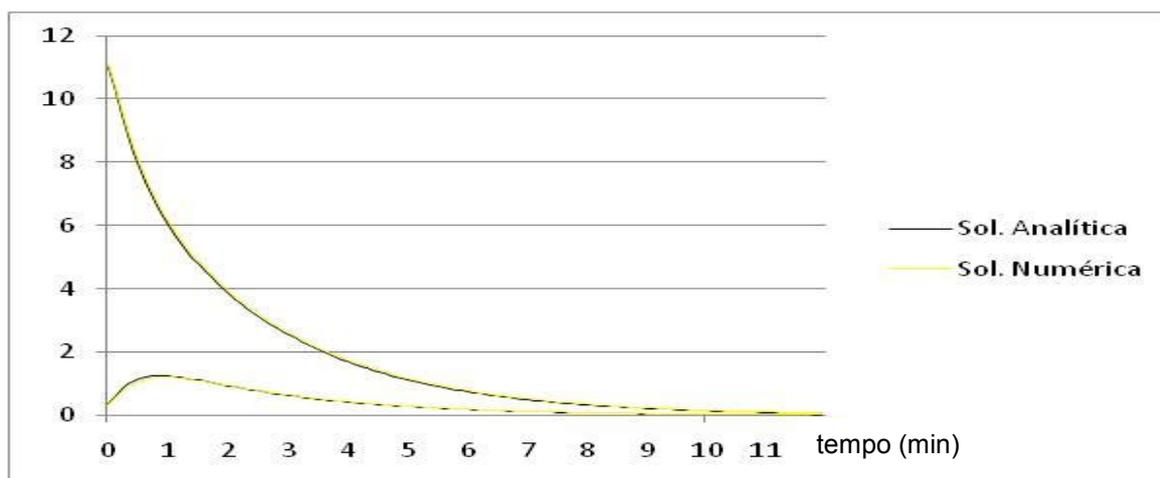


Figura 1. Gráfico dos resultados obtidos pelos diferentes métodos.

Podemos observar que ambos os métodos ficaram muito próximos, com a vantagem para o método numérico devido a maior facilidade de resolução computacional. As diferentes amplitudes utilizadas não resultaram em diferenças significativas no erro da resolução numérica e por isso nem foram mostradas no presente trabalho.

## CONCLUSÃO

O projeto de iniciação científica possibilitou a revelação de novas áreas do conhecimento, onde a aplicação da matemática pode resultar em excelentes melhorias dos processos produtivos. O uso das teorias desenvolvidas para as equações diferenciais, juntamente com os avanços na área de tecnologia da informação podem permitir novos ramos de estudo e propiciar soluções para alguns problemas os quais até pouco tempo eram considerados sem resolução.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CONTADOR, P. R. M. Matemática, uma breve história. 2a. ed. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2006.

JUNIOR, H. C.; LADEIRA, L. A. da C. Equações Diferenciais Ordinárias, Notas de Aulas. 2ª ed. São Carlos - SP: Editora da Usp, 2000.

SODRÉ, U. Equações Diferenciais Ordinárias, Notas de aulas. Londrina - PR: Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil, 2003.

## O Problema de Riemann para Sistemas de Leis de Conservação

**SANTOS**, Abel Cardoso dos; **MOTA**, Jesus Carlos da  
 Universidade Federal de Goiás, 74001-970, Brasil  
 cardoso\_abel@yahoo.com.br, jesus@mat.ufg.br

**PALAVRAS-CHAVE:** Leis de Conservação, Soluções descontínuas, Curvas características, Ondas de choque e rarefação.

### INTRODUÇÃO

O sistema-p, o qual surge no contexto da dinâmica dos gases, consiste na classe de sistemas do tipo:

$$v_t - u_x = 0$$

$$u_t + p(v)_x = 0, \text{ onde } p(v) \text{ é uma função que satisfaz } p' < 0 \text{ e } p'' > 0. \quad (1)$$

Sistemas consistindo de equações homogêneas quase lineares do tipo:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2)$$

com  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^2(\Omega)$  e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , são denominados sistemas de leis de conservação, e aparecem naturalmente em física ao aplicar leis de conservação, onde efeitos dissipativos são desprezados. Para colocarmos o sistema-p na forma (2) fazemos:

$$U = (v, u), F(U) = (-u, p(v)).$$

O problema de Riemann para sistemas de leis de conservação consiste no problema de valor inicial para o sistema-p com dados iniciais:

$$U(x, 0) = U_0(x) = U_l = (v_l, u_l), x < 0$$

$$U_r = (v_r, u_r), x > 0. \quad (3)$$

Neste trabalho estudamos a solução do problema de Riemann para o sistema-p para todos  $U_l, U_r \in \mathbb{R}^2$ .

As figuras que ilustram este trabalho foram extraídas em [SMOLLER].

### METODOLOGIA

Inicialmente, consideramos uma única equação escalar ( $n = 1$ ). Determinamos a chamada condição de salto que relaciona os valores de  $f(u)$  em cada lado da curva de descontinuidade com a inclinação das retas características.

Para sistemas com  $n \geq 2$ , determinamos as condições de choque, as quais são desigualdades relacionando os autovalores da matriz jacobiana de  $f$  com a inclinação das retas características.

*Revisado por:* Jesus Carlos da Mota

Após calcularmos os autovalores  $\lambda_i$  da jacobiana de  $f$  para o sistema-p, determinamos as curvas de choque e de rarefação por  $U_l$  fixo. Existem dois tipos de choques: choque para trás e choque para frente. A curva de choque para trás é denotada por  $S_1(U)$  e a curva de choque para frente é denotada por  $S_2(U)$ . Do mesmo modo, existem dois tipos de rarefação: rarefação para trás, correspondente à família  $\lambda_1$  de características; e rarefação para frente, correspondente à família  $\lambda_2$  de características. Denotamos por  $R_1(U)$  a curva de rarefação para trás e por  $R_2(U)$  a curva de rarefação para frente.

Para  $U_l$  fixo e  $U_l, \bar{U} \in \mathbb{R}^2$ , definimos:

$$\mathcal{F} = \{W_2(\bar{U}) : \bar{U} \in W_1(U_l)\}, \quad W_i(\bar{U}) = S_i(\bar{U}) \cup R_i(\bar{U}), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Se  $U_r \notin S_i(U_l)$  e  $U_r \notin R_i(U_l)$ ,  $i = 1, 2$ , ligamos  $U_l$  a  $\bar{U}$  por uma curva de choque ou de rarefação para trás, e ligamos  $\bar{U}$  a  $U_r$  por uma curva para frente pertencente a  $\mathcal{F}$ .

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A velocidade  $s$  de um choque para frente deve satisfazer as seguintes condições:

$$s < \lambda_1(U_l) \quad \text{e} \quad \lambda_1(U_r) < s < \lambda_2(U_r). \quad (5)$$

Enquanto a velocidade  $s$  de um choque para trás deve satisfazer:

$$\lambda_1(U_l) < s < \lambda_2(U_l) \quad \text{e} \quad \lambda_2(U_r) < s. \quad (6)$$

Fixado  $U_l \in \mathbb{R}^2$ , a curva de choque para trás (ver Fig.1, que mostra também a solução por uma onda de choque para trás) é dada por:

$$S_1(U_l): \quad u - u_l = -\sqrt{(v - v_l)(p(v_l) - p(v))} \equiv s_1(v; U_l), \quad v_l > v. \quad (7)$$

A curva de choque para frente (ver Fig.2, que mostra também a solução por uma onda de choque para frente) é dada por:

$$S_2(U_l): \quad u - u_l = -\sqrt{(v - v_l)(p(v_l) - p(v))} \equiv s_2(v; U_l), \quad v_l < v. \quad (8)$$

Dado  $U_r \in S_1(U_l)$  ou  $U_r \in S_2(U_l)$ , determinamos a velocidade  $s$  da descontinuidade através das equações:

$$s(v - v_l) = -(u - u_l) \quad \text{e} \quad s(u - u_l) = p(v) - p(v_l). \quad (9)$$

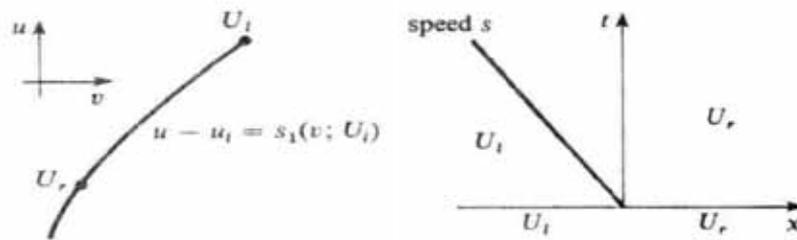


Figura 1: A curva de choque para trás.

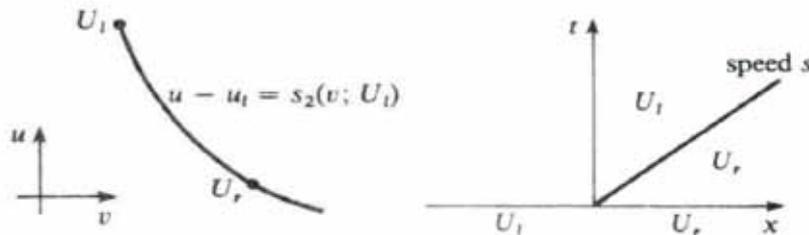


Figura 2: A curva de choque para frente.

Fixado  $U_l \in \mathbb{R}^2$ , a curva de rarefação para trás (ver Fig.3, que mostra também a solução por uma onda de rarefação para trás) é dada por:

$$R_1(U_l): u - u_l = \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(y)} dy \equiv r_1(v; U_l), v_l < v. \quad (10)$$

A curva de rarefação para frente (ver Fig.4, que mostra também a solução por uma onda de rarefação para frente) é dada por:

$$R_2(U_l): u - u_l = - \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(y)} dy \equiv r_2(v; U_l), v_l > v. \quad (11)$$

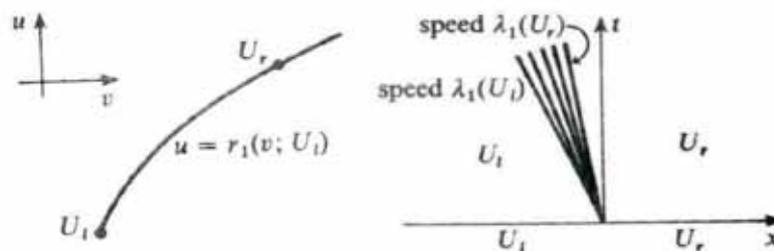


Figura 3: A curva de rarefação para trás.

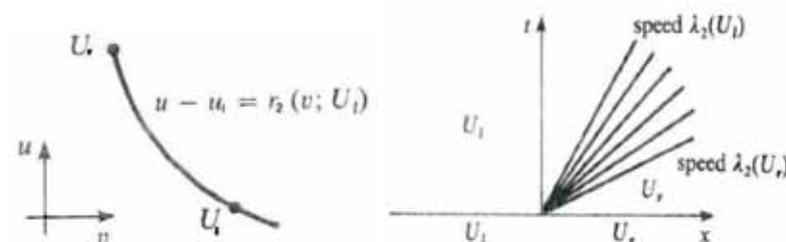


Figura 4: A curva de rarefação para frente.

Revisado por: Jesus Carlos da Mota

A Fig. 5 mostra as curvas  $S_i(U_i)$ ,  $R_i(U_i)$ ,  $i = 1, 2$  no plano  $(v, u)$ . Estas curvas definem quatro regiões abertas denotadas por I, II, III e IV.

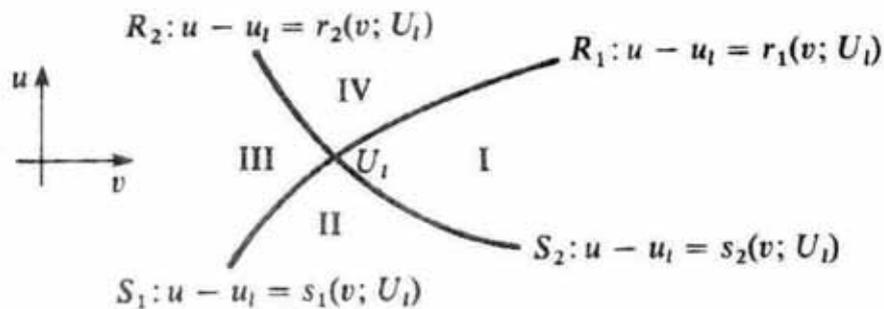


Figura 5: O plano  $(v, u)$  dividido pelas curvas de rarefação e de choque.

As figuras seguintes mostram a solução para  $U_r$  em cada uma das regiões I, II, III, ou IV.

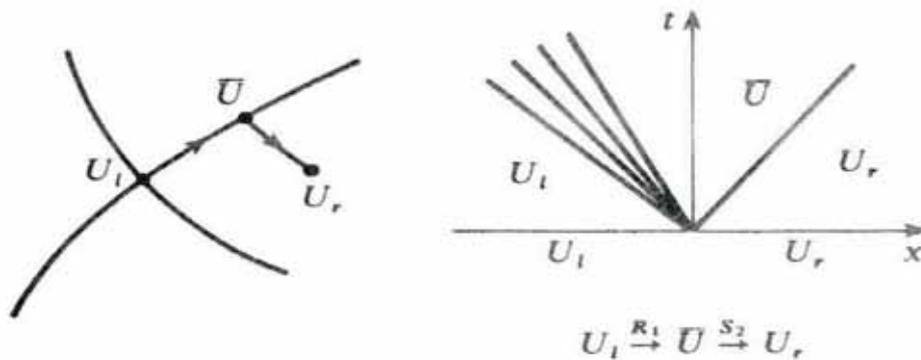


Figura 6: Solução para  $U_r$  na região I.

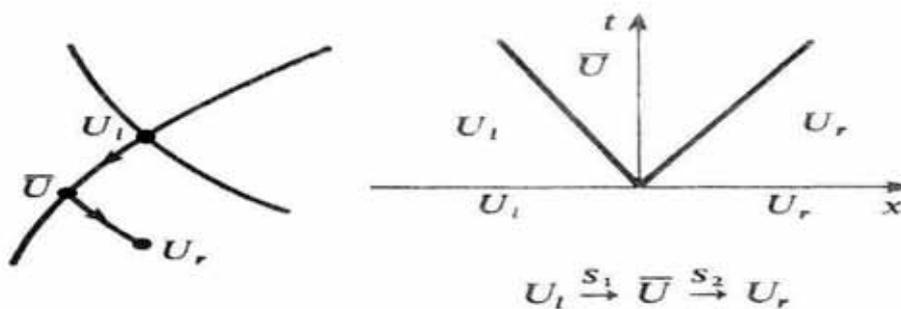


Figura 7: Solução para  $U_r$  na região II.

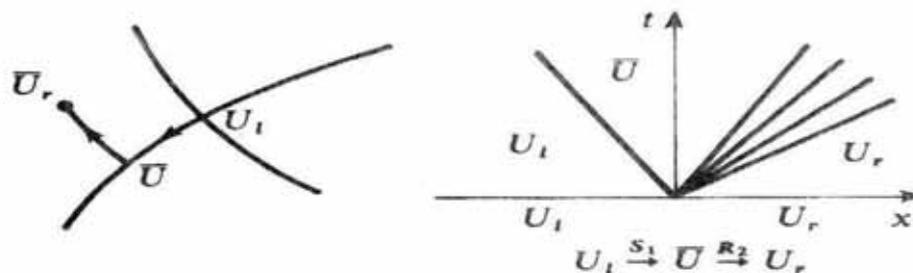


Figura 8: Solução para  $U_r$  na região III.

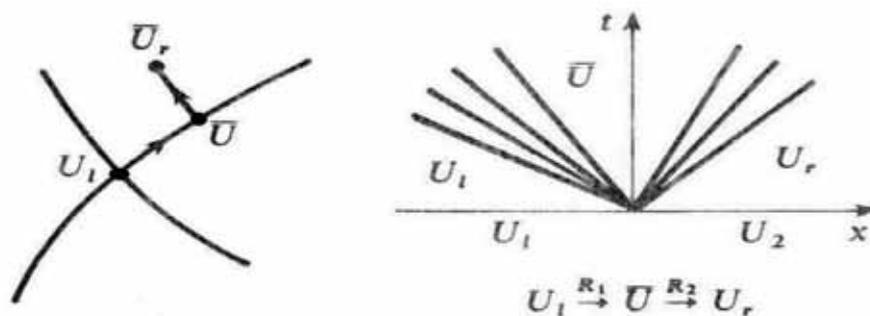


Figura 9: Solução para  $U_r$  na região IV.

Para cada ponto do plano  $(v, u)$  pertencente a uma das regiões I, II ou III passa uma única curva contida em  $\mathcal{F}$ . Portanto, nestes casos, existe uma única solução do problema de Riemann. Existem pontos na região IV para os quais não passam nenhuma curva de  $\mathcal{F}$ . Para estes casos, o problema de Riemann não tem solução.

## CONCLUSÕES

Mostramos então que o problema de Riemann para  $U_l$  fixo e  $U_r \in S_i(U_l)$ , ou  $U_r \in R_i(U_l)$ ,  $i = 1, 2$  ou  $U_r$  pertencente às regiões I, II ou III, admite solução, e tal solução é única na classe de soluções do tipo ondas de choque e rarefação.

## REFERÊNCIAS

IÓRIO, V. **EDP, um curso de graduação**, 2ª.ed., Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro: 2007

SMOLLER, J. **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**, 2ª ed., Springer-Verlag, New York: 1994

**MÉTODOS INDIRETOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEARES****JUNIOR**, José Itamar Mendes de Souza <sup>1</sup>; **BENTO**, Glaydston de Carvalho <sup>2</sup><sup>1</sup>Faculdade Anhanguera de Anápolis. <sup>2</sup>Univercidade Federal de Goiás.e-mail: <sup>1</sup>[jhoseju@hotmail.com](mailto:jhoseju@hotmail.com), <sup>2</sup>[glaydston@mat.ufg.br](mailto:glaydston@mat.ufg.br)

CONPEEX 2010

XVIII Seminário de Iniciação Científica

**RESUMO:** Este trabalho contém exemplos, definições e alguns métodos numéricos indiretos utilizados na resolução de sistemas de equações lineares. É apresentado também em que situação cada um dos métodos pode ser aplicado.

**PALAVRAS- CHAVE:** sistemas lineares, métodos numéricos, convergência.

**INTRODUÇÃO:**

Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$Ax = b, \quad (1)$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  não singular ( $\det(A) \neq 0$ ),  $x$  e  $b$  são vetores  $n \times 1$ .

Os sistemas lineares estão associados com muitos problemas na engenharia e nas ciências, bem como com aplicações da matemática às ciências sociais e ao estudo quantitativo de problemas de negócios da economia. No entanto, na prática, para chegarmos a uma solução em termos numéricos, de sistemas de equações lineares que possuem muitas variáveis, há a necessidade, então, de desenvolver métodos numéricos que possam ser usado em computação eletrônica.

Existem duas grandes classes de métodos para a resolução de sistemas de equações lineares: métodos diretos e indiretos (também conhecidos como iterativos). Um método é dito ser direto quando, na ausência de erros de arredondamento, determina a solução exata do sistema por meio de um número finito de passos previamente conhecidos, levando em conta a invariância da solução de sistemas equivalentes. Como exemplos de métodos diretos, temos: o método de eliminação de Gauss, decomposição  $LU$  e de Cholesky, ver [SPERANDIO et al, 2003; FRANCO 2006; BURDEN et al, 1980; CAMPOS, 2007]. Um método é dito ser indireto quando fornece uma seqüência de aproximantes da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo. Como

exemplos de métodos indiretos, temos: o método de Jacobi e de Gauss-Seidel, ver [SPERANDIO et al, 2003; FRANCO 2006; BURDEN et al, 1980; CAMPOS, 2007; BOLDRINI et al, 1980].

Por razões técnicas, durante vários anos houve preferência generalizada pelos métodos iterativos, mas com o desenvolvimento de computadores em grande capacidade de memória e rapidez, os processos exatos voltaram a ser interessantes do ponto de vista prático e, atualmente, são competitivos com processos iterativos.

Este trabalho se limita à abordagem dos métodos indiretos caracterizando as condições de convergência dos mesmos na obtenção de soluções para sistemas do tipo (1).

### **MATERIAL E MÉTODOS:**

Por meio do método comparativo e dedutível, procedeu-se inicialmente à coleta de dados bibliográficos, passando posteriormente à análise dos mesmos, num trabalho de comparação, procurando consolidar as referências existentes acerca do assunto em discussão.

Também implementou-se programas que comprovam a veracidade do tema em estudo.

Muito colaborou com a pesquisa o professor orientador Dr. Glaydston de Carvalho Bento por intermédio dos conhecimentos repassados, propiciando usufruir de suas experiências técnicas, profissionais e acadêmicas.

### **RESULTADOS E DISCUSSÕES:**

Técnicas iterativas são raramente utilizadas para solucionar sistemas lineares de pequenas dimensões, já que o tempo requerido para obter um mínimo de precisão ultrapassa o requerido pelas técnicas diretas. Contudo, para sistemas grandes, com uma grande porcentagem de entradas zero, essas técnicas são eficientes em termos tanto de cálculo como de armazenamento. Sistemas desse tipo freqüentemente surgem na análise de circuitos e na solução numérica de problemas de valor de limite e equações diferenciais parciais. Os métodos iterativos de Jacobi e de Gauss-Seidel datam do final do século XVIII, e são conhecidos como métodos clássicos.

Considere o vetor  $x^{(0)}$  como uma aproximação inicial para a solução do sistema linear (1) e o seguinte processo iterativo:

$$x^{(0)} = B^{(k-1)} + g, \quad (2)$$

onde  $B$  é uma matriz  $n \times n$  (chamada matriz de iteração) e  $g$  é um vetor  $n \times 1$ . O processo (2), em certas circunstâncias, gera uma sequência de aproximações sucessivas  $x^{(k)}$  para a solução desejada. Uma condição **necessária e suficiente** para a convergência da referida sequência é dada em termos do raio espectral  $\rho(A) = \max \|\lambda_i\|$ , onde  $\lambda_i$  são os autovalores da matriz  $A$ , a saber, quando  $\rho(A) < 1$ , ver [FRANCO 2006; BURDEN et al, 1980; CAMPOS, 2007]. Tendo em vista que a determinação do raio espectral pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema, na prática são utilizadas **condições suficientes**, determinadas em termos de normas subordinadas convenientes, baseado no fato que o processo definido por (2) é convergente se,  $\|B\| < 1$ , para alguma norma subordinada de matrizes, ver [BOLDRINI et al, 1980; FRANCO 2006; BURDEN et al, 1980; CAMPOS, 2007]. Na prática, a solução do problema (1) é obtida com uma determinada precisão usando o seguinte critério de parada:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty}}{\|x^{(k+1)}\|_{\infty}} < \epsilon \quad (\text{erro relativo}), k \geq k_{\max} \quad (\text{Número Máximo de Iterações})$$

Seja  $A$  a matriz dos coeficientes do sistema (1) e considere a seguinte decomposição

$$A = L + D + R,$$

onde  $L = (l_{ij})$  é uma matriz triangular inferior formada pela parte inferior da matriz  $A$ ,  $D = (d_{ij})$  é uma matriz formada pela diagonal de  $A$  e  $R = (r_{ij})$  é uma matriz triangular superior formada pela parte superior da matriz  $A$ .

A seguir é apresentado uma síntese dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

#### Método de Jacobi:

O método de Jacobi é obtido considerando

$$B = -D^{-1}(L + R) \text{ e } g = -D^{-1}b$$

Com respeito às normas  $\|\cdot\|_{\infty}$  e  $\|\cdot\|_1$ , tem-se as respectivas condições suficientes para convergência da sequência gerada por (2):

- O critério das linhas:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\|a_{ij}\|}{\|a_{ii}\|} < 1 \quad (3)$$

- O critério das colunas:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\|a_{ij}\|}{\|a_{ii}\|} < 1$$

Uma matriz  $A$  é **Estritamente Diagonalmente Dominante** se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \|a_{ij}\| < \|a_{ii}\|, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Note que o critério das linhas é equivalente a matriz  $A$  ser estritamente diagonal dominante. Portanto, podemos verificar se o método de Jacobi é convergente avaliando se a matriz  $A$  é estritamente diagonal dominante.

#### Método de Gauss-Seidel:

O método de Gauss-Seidel é obtido considerando

$$B = -(L + D)^{-1} e \quad g = (L + D)^{-1}b \quad (5)$$

Com respeito à norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  é possível verificar que

$$\|B\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\|a_{ij}\|}{\|a_{ii}\|} \beta_i + \sum_{j=i+1}^n \frac{\|a_{ij}\|}{\|a_{ii}\|},$$

ver, por exemplo, [FRANCO, 2006]. Desta última desigualdade, tem-se as seguintes condições suficientes para convergência da sequência gerada por (2):

- O **critério de Sassenfeld**:  $\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$ ;
- O **critério das linhas** dado por (3);
- **Estritamente diagonal dominância** da matriz  $A$  dada em (4).

Pode acontecer que o método de Jacobi resulte convergente, enquanto que o de Gauss-Seidel resulte divergente e vice-versa.

As técnicas diretas e iterativas podem ser aplicadas no balanceamento de uma equação química, o qual é baseado na *lei de conservação da massa de Lavoisier*: “Em uma reação química, a soma das massas dos reagentes é igual à soma das massas dos produtos resultantes.”



Atribuindo coeficientes literais  $x_i$  às substâncias que aparecem na equação, os quais constituem as incógnitas. Aplicando a *lei de Lavoisier* e comparando os elementos membro a membro, constrói-se um sistema de equações algébricas lineares onde as incógnitas são os coeficientes estequiométricos  $x_i$  da reação química. Se houver mais incógnitas do que equações, atribui-se um valor arbitrário a uma delas. Temos então:



um sistema linear com 6 equações e 7 incógnitas. Atribuindo um valor arbitrário a uma delas, temos sistema linear do tipo (1) o qual podemos obter a solução com “uma certa facilidade.”

### CONCLUSÕES:

Através deste trabalho ficou evidente a importância da utilização de técnicas diretas e indiretas e a sua eficácia na resolução de sistemas de equações lineares. Notou-se que as técnicas iterativas permitem obter a solução de um sistema de equações lineares do tipo (1). Apesar de ter sido apresentado, de forma um pouco mais sistemática, apenas os métodos iterativos, foi certificado, através de experimentos computacionais uma comparação entre os diferentes métodos considerados no trabalho.

### BIBLIOGRAFIA:

BURDEN, Richar L. **Análise numérica**. São Paulo. Editora Pioneira Thomson Learning, 2003.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. 3ª Ed. São Paulo. Haper & Row do Brasil, 1980.

CAMPOS, Filho, Frederico Ferreira. **Algoritmos Numéricos**. 2ª Ed. Rio de Janeiro. Editora LTC, 2007.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GARCIA, Eduardo Alfonso Cadavid. **Manual de sistematização e normalização de documentos técnicos**. São Paulo: Atlas, 1998.

SPERANDIO, Décio. MENDES, João Teixeira. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo; Pearson Prentice Hall, 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – UFG

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – IME

PROGRAMA DE INCIAÇÃO CIENTÍFICA E MESTRADO – PICME

**Título:** O Problema da Braquistócrona

**Autor:** Miranda, Bruno de Paula

brunodpmiranda@hotmail.com

**Orientador:** Rogerio de Queiroz Chaves

rogerio@mat.ufg.br

**Palavras-chave:** Cálculo Variacional. Equação de Euler-Lagrange. Braquistócrona.

### Introdução

É de grande interesse em diversos ramos da ciência, trabalhar com máximos e mínimos visto que em quase todos os acontecimentos notórios no nosso viver, normalmente lidamos com tais extremos, de tal maneira que, mesmo quando tais extremos devem ser evitados, é necessário conhecê-los para que seja possível permanecer entre eles.

O Cálculo variacional é uma ferramenta imprescindível para trabalhar com certas situações que envolvem máximos e mínimos.

Um problema típico e interessante do cálculo variacional é o problema da braquistócrona, que trata de encontrar a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo. Esse problema foi posto por John Bernoulli em 1696 e contribuiu de forma importantíssima para o desenvolvimento do cálculo variacional. Foi resolvido por John Bernoulli, James Bernoulli, Newton e L'Hospital.

### Metodologia

Como é exigido pelo programa [PICME], todo o desenvolvimento do projeto visa a participação e apresentação dos resultados dos estudos em congressos científicos ou outros seminários que abordam o tema. Sendo assim, com o auxílio do orientador, retirando dúvidas constatadas, e indicando áreas necessárias para se obter uma maturidade maior no ramo de estudo, foram sanadas as deficiências que seriam entraves à realização da pesquisa em questão.

### Resultados e discussão

#### 1. Funcionais

“Revisado por: Rogerio: de Queiroz Chaves”

Funcionais têm um papel essencial em diversos problemas decorrentes da análise, mecânica, geometria etc. Um funcional nada mais é que uma correspondência que a cada função pertencente a uma determinada classe de funções associa um número real. A título de esclarecimento pode-se dizer que funcionais são funções reais cujo domínio é um conjunto de funções.

Por exemplo 
$$B(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx,$$

onde  $F[x, y(x), y'(x)]$  é uma função contínua de três variáveis e  $y$  é uma função continuamente diferenciável no intervalo  $[a, b]$ . Assim, a cada função  $y$ , o funcional associa um número real  $B(y)$ . Observe que para diferentes funções  $F[x, y(x), y'(x)]$  obtemos funcionais diferentes.

## 2. Condição necessária para a existência de um extremo

A fim de obtermos uma condição necessária para que existam extremos num funcional, semelhante à ideia utilizada no cálculo diferencial, introduzimos o conceito de diferencial de um funcional. Seja  $B[y]$  um funcional, e seja

$$\Delta B[h] = B[y+h] - B[y]$$

o incremento em  $B$  devido a um incremento de  $h = h(x)$  na variável independente  $y = y(x)$ . Fixando  $y = y(x)$ ,  $\Delta B[h]$  é um funcional de  $h$ . Suponha que

$$\Delta B[h] = \mu[h] + \varepsilon \|h\|,$$

onde  $\mu[h]$  é um funcional linear e  $\varepsilon \rightarrow 0$  conforme  $\|h\| \rightarrow 0$ . Então o funcional  $B[y]$  é dito ser diferenciável e  $\mu[h]$  é chamado diferencial de  $B[y]$  e é denotado por  $\delta B[y]$ . É possível provar que o diferencial de um funcional é único (é interessante notar a analogia com o caso de diferenciabilidade em funções de  $n$  variáveis reais).

**TEOREMA 1.** Uma condição necessária para que um funcional diferenciável  $B[y]$  tenha um valor extremo para  $y = \hat{y}$  é que  $\delta B[h] = 0$  para  $y = \hat{y}$  e para todo  $h$  possível (de maneira que  $y+h$  continue no domínio de  $B$ ). Para maiores detalhes ver [2].

## 3. A equação de Euler-Lagrange

Tomaremos como foco de nossa pesquisa, neste ponto, funcionais  $B[x, y, z]$  com primeiras e segundas derivadas parciais contínuas. Procuramos, dentre todas as funções  $y(x)$  continuamente diferenciáveis em  $a \leq x \leq b$  e satisfazendo  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , uma para a qual o funcional

$$B[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

assuma um valor extremo.

Damos então a  $y(x)$  um incremento  $h(x)$  de modo que  $y(x) + h(x)$  ainda satisfaça as condições iniciais, isto é,  $h(a) = 0 = h(b)$ . Logo, a variação associada ao funcional em questão é dado por

$$\Delta B = B[y + h] - B[y] = \int_a^b [F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y')] dx$$

Aplicando o teorema de Taylor chegamos a

$$\delta B[y] = \int_a^b [F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'] dx,$$

onde  $F_y$  e  $F_{y'}$  indicam derivadas parciais com relação a  $y$  e  $y'$  respectivamente.

De acordo com o teorema 1, para que  $B[y]$  tenha um extremo em  $y = y(x)$  deve-se ter

$$\delta B[y] = \int_a^b [F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'] dx = 0.$$

Representando por  $D^1(a, b)$  o conjunto das funções com primeira derivada contínua em  $[a, b]$ , consideremos o seguinte resultado, demonstrado em [2]:

LEMA 1. Se  $c(x)$  e  $d(x)$  são contínuas em  $[a, b]$ , e

$$\int_a^b [c(x)h(x) + d(x)h'(x)] dx = 0$$

para toda função  $h(x) \in D^1(a, b)$  tal que  $h(a) = h(b) = 0$  então  $d(x)$  é diferenciável e  $d'(x) = c(x)$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ .

Tendo em mãos o lema 1, fica claro que

$$\delta B[y] = \int_a^b [F_y h + F_{y'} h'] dx = 0 \rightarrow F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Esta última igualdade é conhecida como Equação de Euler-Lagrange e formalizamos esse resultado no

TEOREMA 2. Seja  $B[y]$  um funcional da forma  $\int_a^b F(x, y, y') dx$

definido no conjunto de todas as funções  $y(x)$  com primeiras derivadas contínuas em  $[a, b]$  e satisfazendo as condições iniciais  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ . Então uma condição necessária para que  $B[y]$  tenha um extremo na função  $y(x)$  dada é que  $y(x)$  satisfaça a equação de Euler-Lagrange.

#### 4. O problema da Braquistócrona

Consideremos dois pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  (consideramos B abaixo de A) situados num mesmo plano vertical, e consideremos uma partícula inicialmente em repouso em A que desliza para B sob a ação da gravidade.

Procuramos a trajetória que minimiza o tempo decorrido para que a partícula vá de A para B (sem atrito).

Resolução:

Escolhemos o sistema de coordenadas de modo que A esteja localizado na origem do mesmo. Sendo o campo de forças conservativo, temos que a energia total da partícula  $T + U$  é constante, onde  $T$  representa energia cinética e  $U$  a energia potencial. Na origem temos  $U = 0$ , logo temos que  $T + U = 0$  durante todo percurso visto que  $T + U$  é constante. Sendo  $T = \frac{1}{2}mv^2$  e  $U = -Fx = -mgx$ , onde  $g$  representa a aceleração gravitacional e  $m$  a massa da partícula. Concluimos que  $v = \sqrt{2gx}$ . Logo, o tempo gasto pela partícula para ir de A a B é dado por

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_A^B \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2gx}} = \int_{x_1=0}^{x_2} \left( \frac{dx^2 + dy^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{x_2} \left( \frac{1+y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Logo, tudo que temos de fazer para encontrar o trajeto que liga A a B que demanda menor tempo para ser percorrido, é minimizar o funcional dado acima. Devemos então aplicar a Equação de Euler-Lagrange à função  $f[x, y(x), y'(x)] = \left( \frac{1+y'^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$  (podemos eliminar o termo  $(2g)^{\frac{1}{2}}$  visto que não depende de  $x$ ).

Observe que nesse caso temos  $\frac{df}{dy} = 0$  e a equação de Euler-Lagrange se torna  $\frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dy'} \right) = 0$ , isto é,  $\frac{df}{dy'} = constante = (2a)^{-\frac{1}{2}}$ , onde  $a$  é uma nova constante (colocamos a constante como sendo  $(2a)^{-\frac{1}{2}}$  por conveniência).

Diferenciando  $f$  em relação a  $y'$  e elevando ao quadrado temos

$$\frac{(y')^2}{x[1+(y')^2]} = \frac{1}{2a} \rightarrow (y')^2 = \frac{x}{2a-x} = \frac{x^2}{2ax-x^2}$$

E então chegamos a

$$y = \int \frac{x}{(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{x}{(-(a-x)^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{x}{a(1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos\theta) \\ dx = a\sin\theta d\theta \end{cases}$$

Temos que  $y = \int \frac{a(1-\cos\theta)a\sin\theta d\theta}{a(\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} = \int a(1 - \cos\theta) d\theta$

e concluimos que  $y = a(\theta - \sin\theta)$  (a constante de integração nesse caso deve ser 0 visto que temos como ponto de partida a origem).

Como as equações paramétricas de uma cicloide que passa pela origem são:

“Revisado por: Rogério: de Queiroz Chaves”

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos \theta) \\ y = a(\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

Concluimos que a trajetória que procuramos é justamente uma cicloide invertida, curva como a mostrada na figura 1 abaixo. Devemos ressaltar que a constante  $a$  deve ser escolhida de modo que a cicloide passe pelo ponto de destino  $B = (x_2, y_2)$ .

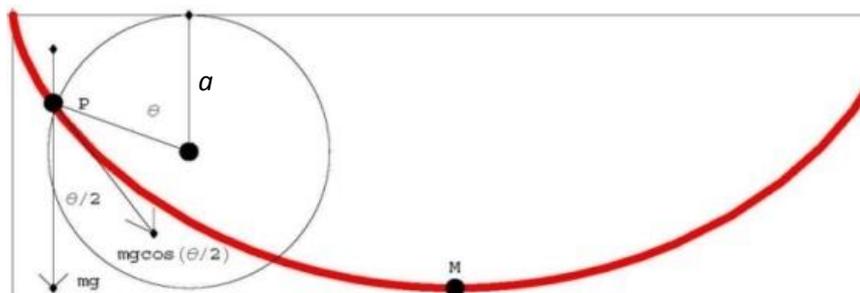


Figura 1: cicloide invertida ligando a origem a um ponto M.

### Conclusão

O intuito desta apresentação fora o de dar uma noção superficial de alguns conceitos e de algumas aplicações do cálculo variacional, ressaltando por meio de um exemplo interessante [o problema da braquistócrona] como é importante, e de certo modo bela, essa ferramenta denominada cálculo variacional.

### Referências Bibliográficas

- [1] Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás Campus catalão. Introdução ao Cálculo variacional e o Problema da Braquistócrona. Disponível em:  
<http://www.catalao.ufg.br/mat/simmi/simmi2010/arquivos/MC3.pdf>\_ Acesso em: 06 de Set. 2010.
- [2] Gelfand, I. M. & Fomin, S,1963. Calculus of Variations. Prentice Hall, New York.
- [3] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo. O problema da Braquistócrona. Disponível em:  
<http://www.icmc.sc.usp.br/~szani/bra/bra.html>. Acesso em: 09 de Set.2010.
- [4] Lopes, A, O, 2006. Introdução à Mecânica Clássica. São Paulo, Universidade de São Paulo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – UFG  
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO – EEEEC  
PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E MESTRADO – PICME

Título: Alguns Aspectos da Geometria Diferencial: curvas e superfícies parametrizadas.

Autor: **SOUZA**, Fábio Júnior Chaveiro de [fabio\\_jr91@hotmail.com](mailto:fabio_jr91@hotmail.com) Orientador: Walterson Pereira Ferreira [waltersonpferreira@gmail.com](mailto:waltersonpferreira@gmail.com)

## INTRODUÇÃO

Geometria diferencial é uma disciplina que estuda a geometria utilizando técnicas do cálculo. O estudo de Geometria Diferencial possui grande utilidade na astronomia, engenharia, cartografia e foi o alicerce da *teoria da relatividade*.

Neste trabalho abordaremos alguns aspectos importantes de Geometria Diferencial. Inicialmente definiremos o que é curva e o que é parametrização. Após, definiremos curvas no plano e curvas no espaço. E por fim, daremos uma noção do que seriam superfícies parametrizadas.

O objetivo deste trabalho não é esgotar o assunto, mas sim dar uma noção intuitiva de alguns tópicos de Geometria Diferencial.

Para o entendimento desse trabalho, supomos que o leitor tenha um conhecimento mínimo de cálculo e geometria básica.

## METODOLOGIA

Na iniciação científica foi utilizada a seguinte metodologia:

- Inicialmente, decidimos o tema a ser estudado, no caso, Geometria Diferencial e Análise na Reta;
- Escolhemos a bibliografia a ser utilizada, a mesma está descrita no final;
- Tivemos encontros semanais para tirar dúvidas e direcionar os estudos;
- Estudos individuais foram realizados em casa;
- Participação em congressos e seminários;
- Realização do curso de verão em análise para completar os estudos;
- E, por fim, apresentamos os resultados obtidos em congressos;

---

*“Revisado por Walterson Pereira Ferreira”*

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 1. Curvas

Intuitivamente, podemos pensar uma curva como um conjunto de pontos com certa propriedade. Também podemos pensar como a trajetória de uma partícula em movimento. Neste último caso, essa trajetória é definida em função de uma variável, por exemplo, o tempo. Essa variável é dita o *parâmetro* da curva.

Assim, parametrizar, como o próprio nome diz, é definir a trajetória, o movimento de uma partícula, ou um conjunto de pontos, em função de parâmetros.

#### 1.1 Curvas no plano

**Definição:** Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável  $\alpha$  de classe  $c^\infty$ , ou seja, com derivadas de todas as ordens contínuas, de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ . A variável  $t \in \mathbb{R}$  é dita *parâmetro* da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dos pontos  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$  é chamado *traço* da curva.

Observamos que uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que para cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , onde as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis de classe  $c^\infty$ .

**Exemplo:** A aplicação  $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é a *ciclóide*. Esta curva possui uma aplicação física muito interessante.

Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável que para cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . O vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  é chamado *vetor tangente* a  $\alpha$  em  $t$ . Este vetor é definido no parâmetro  $t$  e não no ponto  $\alpha(t)$ .

Neste trabalho estudamos apenas as curvas parametrizadas diferenciáveis regulares, isto é, as que possuem vetor tangente não nulo para todo  $t \in I$ .

Fixado  $t_0 \in I$ , podemos definir uma função chamada *comprimento de arco*, que mede o comprimento, ao longo do traço da curva, entre o ponto  $\alpha(t_0)$  e outro ponto  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ . Esta função é definida por  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$  e é diferenciável de classe  $c^\infty$ , pois  $\alpha$  é uma curva regular.

Uma curva regular está parametrizada pelo comprimento de arco se o seu vetor tangente for unitário. É provado que toda curva regular  $\alpha$  admite uma reparametrização  $\beta$  onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

Considere uma curva regular  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Para cada  $s \in I$ ,  $\alpha'(s)$  é um vetor unitário, que denotamos por  $t(s)$ , isto é,  $t(s) = (x'(s), y'(s))$ .  $t(s)$  é dito *vetor tangente*. Seja  $\eta(s)$ , dito *vetor normal*, um vetor unitário ortogonal a  $t(s)$ , tal que a base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  formada por  $t(s)$  e  $\eta(s)$  tenha a mesma orientação que base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , isto é,  $\eta(s) = (-y'(s), x'(s))$ .

O conjunto dos vetores  $t(s)$  e  $\eta(s)$  é dito *referencial de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ . Através destes dois vetores podemos definir um escalar,  $k(s)$ , chamado *curvatura* de  $\alpha$  em  $s$ , que mede a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. As seguintes fórmulas são ditas Fórmulas de Frenet:

$$t'(s) = k(s) \eta(s) \qquad \eta'(s) = -k(s) t(s).$$

ou seja,  $k(s) = \langle t'(s), \eta(s) \rangle$ .

A fórmula da curvatura de uma curva também pode ser obtida para curvas que não estão parametrizadas pelo comprimento de arco.

A curvatura de uma curva define completamente uma curva, a menos de posição no plano, conforme o seguinte teorema:

**Teorema Fundamental das Curvas no Plano:** Dada uma função diferenciável  $k(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma única curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é  $k(s)$ , a menos de posição no espaço, ou seja, se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  tem a mesma curvatura, então existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s))$ .

## 1.2 Curvas no Espaço

**Definição:** Uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ . A variável  $t \in \mathbb{R}$  é dita *parâmetro* da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dos pontos  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$  é chamado *traço* da curva.

Observamos que uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  que para cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , onde as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita *plana* se existe um plano de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(I)$ .

Semelhante às curvas no plano, o *vetor tangente* de uma aplicação  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ . A curva  $\alpha$  é regular se o seu vetor tangente for não nulo para todo  $t \in I$ . A *função comprimento de arco* é dada por  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ . Uma curva regular é dita *parametrizada pelo comprimento de arco* se o seu vetor tangente for unitário. Como ocorre com as curvas planas, toda curva no espaço admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

No espaço, a curvatura de uma curva  $\alpha$  é definida por  $k(s) = |\alpha''(s)|$ . Se  $\alpha''(s) \neq 0$ , definimos o vetor normal por  $\eta(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$ .

Agora precisamos definir um terceiro vetor para junto com  $t$  e  $\eta$  formarem uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . O vetor *binormal* a  $\alpha$  em  $s$  é  $b(s) = t(s) \times \eta(s)$ .

O referencial ortonormal  $t(s)$ ,  $\eta(s)$  e  $b(s)$  é o *triedro de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ .

O número real  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s) \eta(s)$  é denominado *torção* da curva em  $s$ . As fórmulas de Frenet para curvas no espaço são:

$$t'(s) = k(s) \eta(s) \quad \eta'(s) = -\tau(s)b(s) - k(s)t(s) \quad b'(s) = \tau(s)\eta(s)$$

A fórmula da curvatura e da torção de uma curva também pode ser obtida para curvas que não estão parametrizadas pelo comprimento de arco.

A curvatura e a torção de uma curva definem completamente uma curva, a menos de posição no espaço, conforme o teorema a seguir:

**Teorema Fundamental das Curvas no Espaço:** Dadas duas funções diferenciáveis  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma única curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $k(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\alpha$  em  $s$ , a menos de posição no espaço, ou seja, se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  tem a mesma curvatura e torção, então existe uma transformação linear ortogonal  $L$ , com determinante positivo, e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s))$ .

## 2. Superfícies parametrizadas

**Definição:** Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente superfície é uma aplicação  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que

- a)  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ ;

A aplicação  $X(u, v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  é diferenciável de classe  $c^\infty$  quando as funções  $x$ ,  $y$  e  $z$  tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas.

**b)** Para todo  $q=(u, v) \in U$  a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora.

Ou seja, os vetores  $X_u(u,v)$  e  $X_v(u, v)$  são linearmente independentes. Esta condição vai garantir a existência de plano tangente em cada ponto da superfície.

As variáveis  $u$ ,  $v$  são os parâmetros da superfície. O subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  obtido pela imagem da aplicação  $X$  é denominado *traço* de  $X$ .

**Exemplo 1:** Seja  $X(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2})$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes não nulas.  $X$  é uma superfície parametrizada regular cuja imagem é o *parabolóide elíptico*.

**Exemplo 2:** Considere a rotação em torno do eixo  $0z$  de uma circunferência contida no plano  $x0z$  centrada no ponto  $(a, 0, 0)$ , de raio  $0 < r < a$ . Obtemos assim a superfície de rotação  $X(u, v) = ((a+r \cos u)\cos v, ((a+r \cos u)\sin v, r \sin u)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , que descreve o *toro*.

**Palavras-chave:** curvas no plano, curvas no espaço, parametrização, superfícies.

## CONCLUSÃO

Ao final deste trabalho, tendo estudado o teorema fundamental de curvas no plano e o teorema fundamental de curvas no espaço e vendo muitos exemplos e aplicações podemos verificar e constatar a importância e a necessidade do estudo de Geometria Diferencial em nossa vida.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[C] Carmo, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2005.

[G] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo, vol. 3, Editora LTC, 2001*.

[L] Lima, H. L. *Curso de Análise, vol. 1, 12 ed.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Projeto Euclides, 2008.

[T] Tenenblat, K. *Introdução à Geometria Diferencial*, Editora Universidade de Brasília, 1990.

**“ESTUDO DE CONCEITOS ESSENCIAIS EM ÁLGEBRA, ANÁLISE E  
GEOMETRIA” - PICME**

**FRANCO**, Gustavo Lima; **DINIZ**,Geraldo L.

[gustavolimafranco@hotmail.com](mailto:gustavolimafranco@hotmail.com); [geraldo@ufmt.br](mailto:geraldo@ufmt.br)

UFMT - UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

**PALAVRAS-CHAVE (NO MÁXIMO QUATRO)**

álgebra, análise e geometria

## **INTRODUÇÃO**

Este projeto se insere no programa de aperfeiçoamento dos alunos que se destacaram nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), para o aprimoramento dos estudos na área de matemática.

Para tanto, foi desenvolvido um plano de trabalho de estudo e aprofundamento dos conteúdos básicos e essenciais nos cursos de pós-graduação em matemática, a saber: análise na reta, curvas e superfícies e álgebra moderna, visando cobrir os principais conceitos e resultados nas áreas de álgebra, análise e geometria.

Como resultado deste trabalho, espera-se que ao final o aluno esteja em condições de ter um bom desempenho em qualquer curso de mestrado, numa primeira etapa de seus estudos, na área de matemática.

## **MATERIAL E MÉTODO (METODOLOGIA)**

O projeto é executado ao longo de dois anos, sendo proposto em duas etapas, a saber: a primeira esta sendo desenvolvida no primeiro ano e a segunda etapa será implantada no segundo ano, dando continuidade aos estudos. Foi proposto um plano de estudo, através de estudo individual e orientação do professor, com encontros semanais para apresentação do desenvolvimento e esclarecimento de eventuais dúvidas.

Nestes encontros, é avaliado o andamento dos trabalhos, assim como as dificuldades encontradas e as possíveis soluções para tais dificuldades.

## OS RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados até o momento foram o estudo da parte de análise na reta, e o início do estudo de álgebra.

Análise na reta:

- Um esboço da teoria de conjuntos: Álgebra dos conjuntos; Funções; Conjuntos Finito e Infinito; Conjuntos enumeráveis.
- Conjunto dos números reais: propriedades algébricas, de ordem e completude; Cortes, intervalos e o Conjunto de Cantor.
- Sequências de números reais: limites, desigualdades, operações e limites infinitos.
- Séries numéricas: convergência, convergência absoluta e testes de convergência.
- Noções topológicas: abertos, fechados, pontos de acumulação e aderência, conjuntos compactos.
- Funções: limites – definições, propriedades e principais resultados, continuidade.
- Derivadas e aplicações: Definições, regras e diferenciação; Fórmula de Taylor; Funções convexas e côncavas; Aproximações sucessivas.
- A integral de Riemann; Cálculo com integrais.
- Sequências e séries de funções: convergência simples e uniforme, séries de potência e séries de Taylor.

Álgebra linear:

- Matrizes, determinantes e sistemas lineares.

## CONCLUSÕES

Análise na reta lida com o conjunto dos números reais e funções reais. A análise surgiu da necessidade de demonstrações rigorosas às ideias intuitivas como continuidade, limite, derivadas, integrais e sequências de funções.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLE, Henry G.  
**Álgebra Linear**. São Paulo: Ed. Harbra. 3ª Edição, 1984.

LIMA, Elon L. **Análise Real: funções de uma variável**, vol. 1, Coleção Matemática  
Universitária. Rio de Janeiro: IMPA. 2008.

LIMA, Elon L. **Curso de Análise**, vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA.  
1985.

## CONCEITOS BÁSICOS DE CADEIAS DE MARKOV

Éder Silva de Brito<sup>1</sup>; Valdivino Vargas Júnior<sup>2</sup>

Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal de Goiás

<sup>1</sup>edersilvabrito@gmail.com; <sup>2</sup>vvjunior@mat.ufg.br

**Palavras Chave:** Cadeias de Markov, variáveis aleatórias, espaço de estados.

### Introdução

Muitas pesquisas relevantes nas mais diversas áreas se deparam com questões ligadas a aleatoriedade. Muitas vezes resultados interessantes podem ser obtidos a partir da modelagem de processos estocásticos. Um processo estocástico é um tipo de processo com comportamento não determinístico, no sentido em que cada estado desse processo não determina completamente qual será o seu estado seguinte.

Uma Cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico que possui a chamada propriedade markoviana. Um processo estocástico tem a propriedade markoviana se os estados anteriores do processo são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido.

Os primeiros resultados para estes processos foram obtidos por Andrey Markov em 1906. Nos últimos anos, Cadeias de Markov tem sido amplamente estudadas e utilizadas nas mais variadas áreas do conhecimento. As aplicações mais básicas encontradas em livros introdutórios incluem probabilidades associadas a jogos, evolução de populações e resultados sobre teoria de filas.

Em geral, encontram-se aplicações de Cadeias de Markov em modelos epidêmicos, processos de migração, estudos sobre o DNA, modelos de gerenciamento de recursos, modelos para processos de decisão, modelo para difusão de informação, modelos aplicados no mercado financeiro, modelos ligados a indústria de seguros, dentre outros.

### Metodologia

O PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) é um programa que concede bolsas de Iniciação Científica e Mestrado para alunos medalhistas da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas) ou OBM (Olimpíadas Brasileiras de Matemática) que estejam cursando graduação em qualquer universidade.

Os estudos do projeto estão seguindo a linha das Iniciações Científicas, com as devidas horas de dedicação semanais pré-definidas pelo programa, assim como o cumprimento das exigências definidas pelo mesmo. Essas horas de estudo são divididas entre estudo individual, estudo com outros participantes do projeto, e seminários e encontros com o orientador.

Ao escolhermos o tema do estudo (as Cadeias de Markov), o primeiro passo foi compreender o que seria estudado, através de exemplos relativamente simples, mas que podem alcançar altos níveis de complexidade à medida que os estudos

forem se desenvolvendo. Além disso, procurou-se compreender a importância do estudo das Cadeias Markovianas e suas aplicações em diversos problemas puros e aplicados.

Após a decisão do tema de estudo, escolheu-se a bibliografia a ser utilizada, de forma que o objetivo inicial foi compreender as definições e propriedades elementares acerca das Cadeias de Markov, além de vários exemplos, e posteriormente, usássemos esse estudo para aplicar essas Cadeias em diversos problemas, como, por exemplo, no estudo de disseminação de epidemias. Essa parte de aplicações ainda será desenvolvida no decorrer dos estudos do projeto.

Os encontros com o orientador acontecem semanalmente, onde os itens estudados durante a semana são apresentados em forma de seminário, alguns problemas são discutidos, e as dúvidas pendentes são discutidas e sanadas junto ao orientador. Além disso, nesses encontros semanais, são definidos as tarefas e os objetivos que deverão ser alcançados na próxima semana.

Assim como é exigido pelo programa, todo o desenvolvimento do projeto visa à participação e apresentação dos resultados dos estudos em congressos científicos ou outros seminários que abordam o tema.

## Resultados e Discussão

### 1- Cadeias de Markov

**Definição:** Uma *Cadeia de Markov* com espaço de estados  $I$ , distribuição inicial  $\lambda, \lambda_i = P(X = i) = P(\omega : X(\omega) = i)$  e Matriz de Transição  $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$  é, por definição, uma seqüência  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variáveis aleatórias, que se verificam as seguintes propriedades:

- i)  $X_0$  tem distribuição  $\lambda$ ;
- ii) Para  $n \geq 0$ , condicionado em  $X_n = i$ ,  $X_{n+1}$  tem distribuição  $(p_{ij} : j \in I)$  e é independente de  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ .

Notação:  $Markov(\lambda, P)$ .

Em outras palavras, podemos explicitar mais a definição, condicionados  $n \geq 0$  e  $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in I$ ,

- i)  $P(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$ ;
- ii)  $P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$ .

### 2- Propriedade Markoviana

**Teorema:** Dada a seqüência  $(X_n)_{n \geq 0} Markov(\lambda, P)$ . Condicionada em  $X_m = i$ ,  $(X_{m+n})_{n \geq 0}$  é  $Markov(\delta_i, P)$  e é independente das variáveis aleatórias  $X_0, X_1, \dots, X_m$ .

Em palavras, essa propriedade nos diz que os estados futuros  $X_j (j > n)$  dependem somente do estado atual  $X_n$ , mas não depende dos estados anteriores.

### 3- Classificação de Estados

Definição: Dados dois estados  $i$  e  $j$ , um *caminho* entre  $i$  e  $j$  é uma seqüência de transições que começam em  $i$  e terminam em  $j$ , tais que cada transição tem uma probabilidade positiva de ocorrência.

- i) Um estado  $j$  é *acessível* a partir do estado  $i$  se existe um caminho que liga esses dois estados.
- ii) Dois estados  $i$  e  $j$  são *comunicáveis* se  $j$  é acessível a partir de  $i$ , e  $i$  é acessível a partir de  $j$ .
- iii) Um conjunto de estados  $E$  em uma cadeia de Markov é uma *classe* se nenhum estado fora de  $E$  é acessível por qualquer estado de  $E$ . Se a cadeia inteira é formada por uma única classe, isto é, todos os estados são comunicáveis, a cadeia é dita *irredutível*.
- iv) Um estado  $i$  é *absorvente* se  $p_{ii} = 1$ .
- v) Um estado  $i$  é *transiente* se existe um estado  $j$  que é acessível a partir de  $i$ , mas o estado  $i$  não é acessível a partir de  $j$ .
- vi) Se um estado não é transiente, ele é *recorrente*.
- vii) Um estado  $i$  é *periódico* com período  $T > 1$  se  $T$  é o menor número tal que todos os caminhos que levam do estado  $i$  de volta ao estado  $i$  tem comprimento múltiplo de  $T$ . Se um estado recorrente não é periódico, então ele é *aperiódico*.
- viii) Se todos os estados de uma Cadeia de Markov são recorrentes, aperiódicos e comunicáveis entre si, então a cadeia é dita *ergódica*.

### 4- Tempo de acerto e probabilidade de absorção

Dada a seqüência  $(X_n)_{n \geq 0}$  *Markov*  $(\lambda, P)$ . O *Tempo de Acerto* de um subconjunto  $A$  de  $I$  é uma variável aleatória  $H^A$  dada por  $H^A(w) = \inf\{n \geq 0 : X_n(w) \in A\}$ . Em palavras, o tempo de acerto é o menor tempo (ou passo) em que a seqüência assume um estado  $i$  do conjunto  $A$ . A probabilidade de  $(X_n)_{n \geq 0}$  sempre alcançar  $A$ , dado que  $i$  é o estado inicial, é  $h_i^A = P_i(H^A < \infty)$ . Quando  $A$  é uma classe fechada,  $h_i^A$  é dita *probabilidade de*

*absorção*. Isso significa que quando o processo alcança a classe  $A$ , como ela é fechada, o processo passará a ocorrer apenas nessa classe.

## 5- Propriedade Forte de Markov

**Teorema:** Seja a seqüência  $(X_n)_{n \geq 0}$  *Markov* $(\lambda, P)$  e  $T$  um tempo de parada (onde o evento  $T = n$  depende somente das variáveis  $X_0, \dots, X_n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Então, condicionado em  $T < \infty$  e  $X_T = i$ ,  $(X_{T+n})_{n \geq 0}$  é *Markov* $(\delta_i, P)$  e é independente de  $X_0, X_1, \dots, X_T$ .

## 6- Passeio Aleatório

Um exemplo específico de Cadeias de Markov são os *Passeios Aleatório*. Os passeios aleatórios são a formalização matemática de uma trajetória a partir de uma seqüência de passos dados de forma aleatória.

**Definição:** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que  $E|X_i| < \infty$ . Seja  $S_0 = C$  e  $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $n \geq 1$ . O processo  $\{S_n, n \geq 0\}$  é chamado *passeio aleatório*.

Diversas áreas do conhecimento como estatística, economia, computação, ecologia, dentre outras, utilizam resultados oriundos desses processos.

## Conclusão

A ideia de se conhecer várias áreas da Matemática e suas aplicações sempre foi atrativa além de importante ferramenta como complemento da formação acadêmica e um método de contribuir com as decisões futuras sobre em qual área atuar em uma possível carreira de pesquisa.

Além disso, enxergar e entender aplicações de um estudo teórico faz com que a curiosidade e a vontade de desenvolver novos conhecimentos sejam aguçados, principalmente no período de graduação.

As Cadeias de Markov são bons exemplos de uma forte teoria com muita aplicação prática, e presente em diversas situações, com uma grande importância na compreensão de vários processos e fenômenos.

Inspirado nessa importância é cada vez mais fácil sentir curiosidade em aprender mais acerca do assunto, além de perceber sua profunda ligação com áreas da Matemática pura e buscar relacionar o conhecimento nessas áreas específicas à matemática aplicada, complementando-se a aceitação e assimilação de fatos importantes em ambas as áreas.

## Referências Bibliográficas

- [1] Ferrari, P.A. e Galves, J.A., *Acoplamento em Processos Estocásticos*, Notas para um minicurso apresentado na XIII Escuela Venezolana de Matematicas, 2000;
- [2] Hoel, P.G., dos Santos, J.P.O. e Murari, I.T.C. *Introduction to Stochastic Processes*, Waveland Press, 1986;
- [3] Norris, J.R., *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1998;
- [4] Ross, S.M., *Stochastic Processes*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 2<sup>a</sup> edição, 1996.

Revisado por: Valdivino Vargas Júnior

## PICME

### Relatório do Conteúdo Estudado<sup>1</sup>

Cleverson Ezequiel Silva Sobrinho

[cleverss@engelet.grad.ufg.br](mailto:cleverss@engelet.grad.ufg.br)

Orientador: Armando Mauro Vasquez Corro

[corro@mat.ufg.br](mailto:corro@mat.ufg.br)

Universidade Federal de Goiás

Instituto de Matemática e Estatística – Campus Samambaia

Caixa Postal 131 - Goiânia-GO - CEP: 74001-970

Telefone: (62) 3521-1208

Palavras-chave: Axioma, Espaços, Geometria, Conjunto.

#### Introdução

O PICME foi criado numa parceria entre a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior), o IMPA (Instituto Nacional de matemática Pura e Aplicada) e o CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e concede bolsas de Iniciação Científica e de Mestrado a alunos que foram medalhistas da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) ou da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) e estão cursando qualquer curso de graduação em instituições públicas ou privadas. Consiste em dois anos de Iniciação Científica e mais dois anos de Mestrado, podendo variar de aluno para aluno. O objetivo é propiciar uma formação sólida em

---

<sup>1</sup> Revisado por: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro

matemática de alunos que se destacaram nas Olimpíadas escolares, e desta forma enriquecer o desenvolvimento profissional do aluno.

### **Metodologia**

A metodologia utilizada é de estudo individual do conteúdo bibliográfico, juntamente com a discussão e resolução de exercícios propostos, analisando os conceitos envolvidos e desenvolvendo a abstração necessária para compreensão do conteúdo estudado nos livros-texto em cada etapa da Iniciação Científica.

### **Tópicos Estudados**

- Teoria dos Números (Os Sistemas de Numeração, Os Números Naturais, Axiomas de Peano, Os Números Inteiros, Aritmética Modulo N);
- Geometria Plana Euclidiana (Os Axiomas de Incidência e Ordem, Axiomas sobre Medição de Segmentos, Axiomas sobre Medição de ângulos, O Axioma das Paralelas);
- Geometria Euclidiana Espacial (Construção de Pirâmides, Paralelismo de retas, Paralelismo de reta e plano, Planos perpendiculares, Projeções, Ângulos e distâncias, Proporcionalidade);
- Álgebra Linear (Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, As formas racional e de Jordan, Espaços com Produto Interno, Teoria Espectral);
- Geometria Diferencial (Teoria Local de Curvas e Superfícies, Vetor Tangente, Fórmulas de Frenet, Curvatura, Raio da Curvatura, Involutas e Evolutas);
- Topologia Geral (Conjuntos e Relações, Funções, Cardinalidade, Espaços Topológicos, Continuidade e Equivalência Topológica, Espaços Métricos, Axiomas de Separação, Compacidade).

## Resultados e Discussão

### Teoria dos Números

A teoria dos números preocupa-se com as propriedades dos números, especialmente os números inteiros. Seu surgimento se deu quando o Homem começou a contar, e para isso utilizou o que tem mais ao seu alcance, isto é, as próprias mãos. O ser humano passou a atribuir quantidades a entidades matemáticas abstratas, os números, mas isso ocorreu de maneira lenta e gradual. Se dois conjuntos não vazios e finitos podem ser colocados em correspondência biunívoca, então o que há em comum entre eles é o *número* de elementos, assim surgiram os números naturais.

A construção formal do conjunto dos números naturais ocorreu através dos axiomas de Peano, para isso utiliza-se de três conceitos, o número *zero*, número *natural*, e a relação de *é sucessor de*.

Mas, sem dúvida, a aplicação mais interessante de Teoria dos números é a chamada Aritmética Modular, que possui uma aplicabilidade enorme em códigos numéricos como: código de barras, CPF, RG, ISBN, etc. Em aritmética modular utiliza-se o resto das divisões,

Ex.: As horas de um relógio.

$1 \equiv 13 \equiv 25 \pmod{12}$ , lê-se: 1 congruente a 13, congruente a 25 módulo 12.

Esta notação significa que 1, 13 e 25, têm o mesmo resto quando divididos por 12.

### Geometria Plana Euclidiana

A geometria euclidiana envolve uma abstração matemática da qual, a partir de alguns postulados (axiomas), intuitivos, pode-se demonstrar diversas propriedades geométricas. A maioria dos axiomas são intuitivamente necessários para se estabelecer um ponto de partida, como os que dizem respeito a existência de pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta. Mas o axioma das paralelas, é o axioma mais interessante deles, os matemáticos por muitos anos desconfiaram que esse axioma podia ser demonstrado e, portanto, seria um teorema

e não um axioma. Na tentativa de se demonstrar este axioma, por contradição, espera-se chegar a algum absurdo, e assim estaria demonstrado que é um teorema. A negação deste axioma nos leva a uma série de propriedades diferentes (mas nenhuma contradição) da geometria euclidiana, desta forma originam-se geometrias não-euclidianas. Estas geometrias têm várias aplicações em física, sobretudo na Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein.

### **Geometria Espacial**

Trata-se de uma construção análoga e posterior à geometria plana, portanto, as propriedades do plano, continuam válidas para o caso de três dimensões. Vale ressaltar que existem, nesse caso, postulados diferentes da geometria plana, o que é bastante intuitivo, pois é preciso definir conceitos de *ponto*, *reta*, *plano* de maneira diferente. A partir disso é possível construir pirâmides e outros objetos tridimensionais.

### **Álgebra Linear**

Os estudos de álgebra linear foram realizados através de curso de verão realizado entre Janeiro e Fevereiro de 2010, o curso de verão foi ministrado às segundas quartas e sextas, das 13h30min às 16h50min (com intervalo), com aula expositiva com quadro e giz. As aulas foram dadas pela professora Shirlei Serconek.

### **Geometria Diferencial**

Este tipo de geometria tem como principal característica, a aplicação de conceitos do cálculo diferencial e integral na geometria analítica, de fato a utilização destes conceitos proporciona um estudo muito vasto de geometria, sobretudo em curvas no plano e no espaço, e em superfícies. Dada uma função vetorial, pode-se trabalhar com esta função usando os conhecimentos de cálculo de funções vetoriais. A conexão entre geometria e cálculo, proporcionou uma contribuição bastante forte em soluções de equações diferenciais parciais não-lineares. Existe um teorema que garante que sob determinadas condições, uma curva está relacionada à função curvatura de maneira única, isto é, pode-se estudar uma dada curva, estudando sua curvatura, facilitando a análise dessas curvas, este teorema é conhecido como o

teorema fundamental das curvas planas. A diferença entre as curvas no plano das curvas no espaço, é que as curvas no espaço são caracterizadas pela curvatura e sua torção no espaço.

### Topologia Geral

A topologia se dedica ao estudo de conjuntos abertos, estuda as propriedades de conjuntos abertos, não levando em conta distâncias, desta maneira se definindo funções de um dado conjunto A em um conjunto B, pode-se estudar continuidade dessas funções, sem usar noções de distância.

### Bibliografia

BARBOSA, João L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 6ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

CARVALHO, Paulo C. P. *Introdução a Geometria Espacial*. 4ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Ed. Atual, 1991.

LIPSCHUTZ, Seymour. *Topologia Geral*. Ed. McGRAW-HILL DO BRASIL, 1973.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra linear*. São Paulo: Ed. LTC, 1971.

TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. Brasília: Ed. UnB, 1988.

**Estudo de análise real e álgebra linear – PICME<sup>1</sup>****ASSUNÇÃO JR.**, Milton de Oliveira

assuncao\_milton@yahoo.com.br, IC-UFMT, Cuiabá/MT.

**DINIZ**, Geraldo L.

geraldo@ufmt.br, DMAT, ICET, UFMT, Cuiabá/MT.

**Resumo:**

Este projeto vem sendo executado ao longo de um ano e meio, dentro do programa de aperfeiçoamento dos alunos que se destacaram nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), para o aprimoramento dos estudos na área de matemática. Para tanto, foi desenvolvido um plano de estudo, para aprofundamento dos conteúdos básicos e essenciais nos cursos de pós-graduação em matemática, a saber: análise na reta e álgebra linear, visando cobrir os principais conceitos e resultados nestas áreas. Como resultado deste estudo, espera-se que o acadêmico esteja em condições de ter um bom desempenho em qualquer curso de mestrado, numa primeira etapa de seus estudos futuros, na área de matemática.

**Palavras-chave:**

OBMEP, Análise na reta, Álgebra moderna, construções geométricas.

**Introdução:**

No período em que foi cursado o ensino médio integrado no Centro Federal de Educação Tecnológica de Mato Grosso (CEFET/MT) e atual Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT) houve, por duas vezes, nos anos de 2007 e 2008, a oportunidade de participar das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), em que o autor recebeu nessas edições uma menção honrosa e uma medalha de bronze, respectivamente.

Essas olimpíadas fazem parte de um projeto que visa estimular o estudo da matemática entre alunos e professores de todo o país. Em face do resultado obtido, foi possível participar de aulas adicionais de matemática pelo período de um ano, o

---

<sup>1</sup> Revisado por: Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz (orientador).

que certamente contribuiu para melhorar o aprendizado e aumentar o interesse pela matemática.

No ano seguinte, cursando Ciência da Computação na UFMT, e através da OBMEP foi possível participar do Programa de Iniciação Científica de Medalhistas (PICME), um programa que concede bolsas para alunos medalhistas da OBMEP, cursando graduação em instituições públicas ou privadas, em qualquer área de atuação.

Neste período, como participante do PICME inscrito no programa da Universidade Federal de Goiás (UFG), e orientado pelo Prof. Dr. Geraldo L. Diniz, da UFMT, foi desenvolvido um plano de estudos previamente elaborado.

A participação nesse programa tem possibilitado o aprofundamento de alguns conhecimentos na área da matemática e, principalmente, a obtenção de novos conhecimentos.

Dessa forma, o programa vem estimulando o interesse pela área, e a prática de estudos correlatos. Este texto representa uma síntese do que foi desenvolvido neste primeiro ano de participação no PICME até o presente momento.

### **Objetivos:**

Aprofundar os conhecimentos de matemática nas áreas de análise na reta, curvas e superfícies e álgebra moderna, visando a preparação para curso de mestrado em matemática.

### **Metodologia:**

Foi proposto um plano de trabalho, através de estudo individual sob a supervisão do orientador, com encontros semanais para apresentação do desenvolvimento e esclarecimento de eventuais dúvidas, no qual o orientando deverá aprofundar seus conhecimentos nos conteúdos detalhados no plano de trabalho.

Nestes encontros, foi avaliado o andamento dos trabalhos, assim como as dificuldades encontradas e as possíveis soluções para tais dificuldades.

O plano de estudos incluiu os seguintes tópicos para estudo:

#### 1. Análise na reta:

- Um esboço da teoria de conjuntos: Álgebra dos conjuntos; Funções; Conjuntos Finito e Infinito; Conjuntos enumeráveis.
- Conjunto dos números reais: propriedades algébricas, de ordem e completude; Cortes, intervalos e o Conjunto de Cantor.
- Sequências de números reais: limites, desigualdades, operações e limites infinitos
- Séries Numéricas: convergência, convergência absoluta e testes de convergência.
- Noções topológicas: abertos, fechados pontos de acumulação e aderência, conjuntos compactos
- Funções: limites - definições, propriedades e principais resultados. Continuidade.
- Derivadas e aplicações: Definições, regras e diferenciação; Fórmula de Taylor; Funções convexas e côncavas; Aproximações sucessivas.
- A integral de Riemann; Cálculo com integrais.
- Sequências e séries de funções: convergência simples e uniforme, séries de potência e séries de Taylor.

## 2. Álgebra linear

- Matrizes, determinantes e sistemas lineares.
- Espaço vetorial.
- Transformações lineares.
- Autovalores e autovetores.
- Diagonalização de operadores.
- Formas lineares, bilineares e quadráticas,

### **Resultados:**

O estudo foi desenvolvido dentro do cronograma apresentado, todas as atividades propostas foram executadas dentro do prazo, e as dificuldades que foram encontradas no desenvolvimento do trabalho foram sanadas nas reuniões semanais para apresentação e discussão do trabalho desenvolvido.

Neste período, o trabalho foi desenvolvido através de estudo dirigido de análise na reta, tendo como base os livros LIMA (2008; 1985). Para o estudo de álgebra linear foram utilizados os livros BOLDRINI (1984) e HOFFMAN e KUNZE (1971).

### **Conclusões:**

Com este plano de estudo foi possível aprofundar os conhecimentos em análise real e álgebra linear, além de ter visto algumas aplicações como, por exemplo, no estudo de autovalores e autovetores, o artigo “Sobre uma classe de matrizes cujo problema de autovalores é facilmente solucionável” de Odelar Leite Linhares.

### Referências bibliográficas:

BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. São Paulo: Ed. Harbra. 3ª Edição, 1984.

HOFFMAN, K. e KUNZE, R. **Álgebra Linear**. São Paulo: Polígono. 1971.

LIMA, Elon L. **Análise Real: funções de uma variável**, vol. 1, Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA. 2008.

LIMA, Elon L. **Curso de Análise**, vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA. 1985.

LINHARES, Odelar L. Sobre uma classe de matrizes cujo problema de autovalores é facilmente solucionável. **Ciência e Cultura**. Campinas. v 29, n. 8, p. 914-919, ago. 1977.

## Um par de Superfícies Isométricas



Matheus Leví Paranaguá  
e-mail: matheus7@engelet.grad.ufg.br  
EEEC-UFG



Orientador: Fábio Vitoriano e Silva  
e-mail: fabios@mat.ufg.br  
IME-UFG

Palavras-chave: isometria, helicóide e catenoide

## Introdução:

O objetivo deste texto é apresentar a isometria que há entre o catenoide e o helicóide, bem como ilustrá-la pelo cálculo do comprimento de curvas e de áreas de porções dessas duas superfícies.

## Desenvolvimento:

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto aberto,  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada diferenciável, com parametrização  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Recordemos inicialmente como se define a primeira forma quadrática. Dado  $q = X(u_0, v_0) \in S$ , indica-se por  $T_q X$  o plano tangente a  $S$  em  $q$ , consistindo de todos os vetores da forma  $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

A primeira forma quadrática  $I_q: T_q X \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $I_q = \langle w, w \rangle = |w|^2$ . Como  $w = aX_u + bX_v$ , escreve-se  $I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle$ . Definimos então os coeficientes da primeira forma quadrática como segue

$$E(q) = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F(q) = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G(q) = \langle X_v, X_v \rangle$$

de modo que  $I_q(w) = a^2 E(q) + 2ab F(q) + b^2 G(q)$ .

Recordemos agora as fórmulas para o cálculo do comprimento de curvas e da área de uma superfície. Com as fórmulas em mãos vamos relacioná-las com a primeira forma quadrática. Seja  $X(u, v)$  como acima, se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável da superfície  $S$ , então para  $t_0, t_1 \in I$ ,  $t_0 \leq t_1$ , o comprimento de  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_q(\alpha'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G} dt.$$

Seja  $D \subset U$  uma região de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $X$  restrita ao interior de  $D$  é injetiva. A área da região

$X(D) \subset S$  é dada pela integral  $\iint_D |X_u \times X_v| \, dudv$ .

Como  $|X_u \times X_v|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2$ , reescrevemos

$$A(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

Se duas superfícies simples, ou seja, se  $X(u, v)$  e  $\bar{X}(u, v)$  são aplicações injetivas, têm o mesmo domínio  $U$ , então podemos definir uma correspondência bijetora entre os traços das superfícies. De fato, se  $X(U) = S$  e  $\bar{X}(U) = \bar{S}$ , como  $X$  e  $\bar{X}$  são injetivas, existem as funções inversas  $X^{-1}: S \rightarrow U$  e  $\bar{X}^{-1}: \bar{S} \rightarrow U$  portanto, a aplicação  $\phi: S \rightarrow \bar{S}$ , definida por  $\phi = \bar{X} \circ X^{-1}$  é bijetora e sua inversa é dada por  $\phi^{-1} = X \circ \bar{X}^{-1}$ .

Se esta função  $\phi: S \rightarrow \bar{S}$  preserva comprimento de curvas – isto é, para toda curva  $\alpha$  de  $X$ , o comprimento de  $\alpha$  é igual ao comprimento da curva  $\phi \circ \alpha$  – dizemos que  $X$  e  $\bar{X}$  são isométricas. Ou seja, se as funções comprimento de curva definidas em cada superfície forem iguais, temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_q(\alpha'(t))} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u^2 E(q) + 2u'v'F(q) + v^2 G(q)} \, dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u^2 \bar{E}(q) + 2u'v'\bar{F}(q) + v^2 \bar{G}(q)} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_q(\bar{\alpha}'(t))} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} |\bar{\alpha}'(t)| \, dt;$$

o que nos leva a concluir que:  $E(q) = \bar{E}(q)$ ,  $F(q) = \bar{F}(q)$ ,  $G(q) = \bar{G}(q)$ .

Portanto, para decidirmos se duas superfícies quaisquer são isométricas ou não, devemos verificar se os coeficientes das respectivas primeiras formas quadráticas são iguais.

Em particular, a título de ilustração, faremos tal verificação para as duas superfícies abaixo:

a) o helicóide  $X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$ ;  $u \in \mathbb{R}$  e  $0 < v < 2\pi$ , tem seu traço mostrado na Ilustração 1 e é tal que:

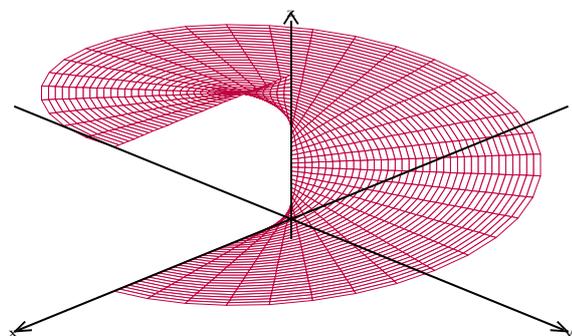


Ilustração 1: helicóide

$$X_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0),$$

$$X_v = (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 1);$$

donde os coeficientes da primeira forma quadrática são:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 + u^2.$$

b) o catenoide (v. Ilustração 2) admite a seguinte parametrização:

$$Y(u, v) = (\operatorname{arcsenh}(u), \sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \operatorname{sen} v);$$

$$u \in \mathbb{R}, \quad 0 < v < 2\pi$$

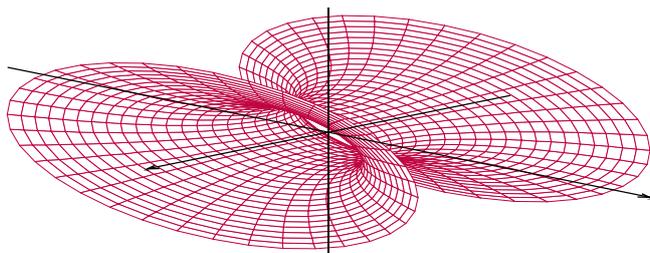


Ilustração 2: catenóide

temos assim os respectivos vetores:

$$Y_u = \left( \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cos v, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \operatorname{sen} v \right)$$

$$Y_v = (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 1)$$

e os seguintes coeficientes da primeira forma quadrática  $E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 + u^2$ .

Vamos explicitar a isometria,  $\phi$ , entre as referidas superfícies.

A função  $X^{-1}$  toma um ponto do helicóide e leva no plano, ou seja,

$$X^{-1} = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right).$$

Fazendo a composição com  $Y$  obtemos  $\phi(x, y)$ :

$$\phi(x, y) = \left( \operatorname{arcsenh} \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{1 + x^2 + y^2} \cos\left(\arctan\frac{y}{x}\right), \sqrt{1 + x^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) \right).$$

Pronto. Uma “ponte” entre as duas superfícies foi estabelecida, ou seja, podemos relacionar um ponto do helicóide com outro ponto do catenoide e, sabendo que as distâncias entre os pontos não se alteram, podemos pensar em calcular os comprimentos das curvas da superfície do helicóide e das suas imagens pela isometria,  $\phi$ , sobre o catenoide e comprovar que os comprimentos dessas curvas são idênticos, fantástico!

Adiante exibimos (Ilustrações 3a, 3b) as representações de uma curva do helicóide e de sua imagem sobre o catenoide e um cálculo de seus comprimentos. Faz-se o mesmo sobre o cálculo de áreas sobre ambas as superfícies.

Exemplos:

Seja uma curva sobre o helicóide definida por:

$$\alpha(t) = (\sqrt{1+t^2} \cos(\arctan(t)), \sqrt{1+t^2} \sin(\arctan(t)), \arctan(t)), \quad 0 < t < 2,5.$$

O comprimento desse trecho da curva é de aproximadamente 1,27798 u.c.

Para confirmarmos a isometria fixamos  $t = 1$  e admitimos  $u = t$  (apenas uma mudança de parâmetros) em  $\phi$ :

$$\phi(t) = (\operatorname{arcsinh} \sqrt{1+t^2}, \sqrt{2+t^2} \cos(\arctan(t)), \sqrt{2+t^2} \sin(\arctan(t))), \quad 0 < t < 2,5.$$

O comprimento, como esperado, é de 1,27798 u.c., aproximadamente.

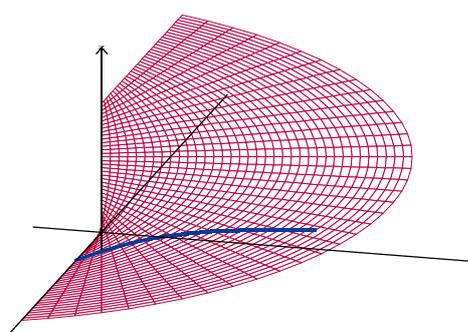


Ilustração 3a : curva no helicóide

$\phi(t)$   
→

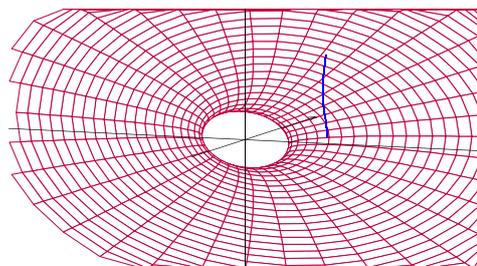


Ilustração 3b: curva no catenóide

Seja R a região sobre o helicóide dada por

$$\alpha(t, u) = \left( \sqrt{t^2+u^2} \cos\left(\arctan \frac{u}{t}\right), \sqrt{t^2+u^2} \sin\left(\arctan \frac{u}{t}\right), \arctan \frac{u}{t} \right), \quad 0 < t < 1 \text{ e } 0 < u < 2,$$

(v. Ilustração 4a.)

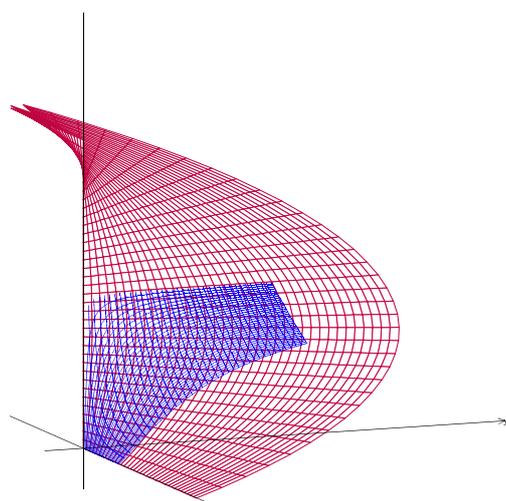


Ilustração 4a: porção do helicóide

$\phi(t, u)$

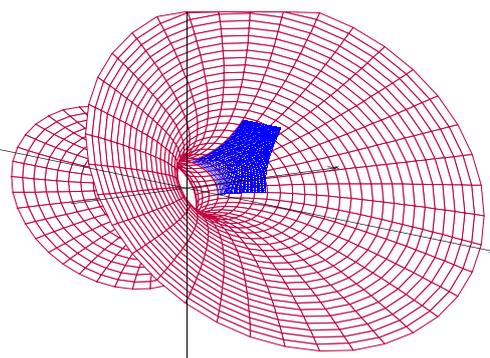


Ilustração 4b: porção do catenóide

Obtém-se então como área da região R (em azul) 2,29559 u.a. aproximadamente.

Sobre o catenoide toma-se (v. Ilustração 4b):

$$\phi(t, u) = \left( \operatorname{arcsinh} \sqrt{t^2 + u^2}, \sqrt{1 + t^2 + u^2} \cos \left( \arctan \frac{u}{t} \right), \sqrt{1 + t^2 + u^2} \sin \left( \arctan \frac{u}{t} \right) \right),$$

$0 < t < 1$  e  $0 < u < 2$ .

O valor da área azul é de cerca de 2,29559 u.a.

Mediante uma escolha conveniente de parâmetros é possível mostrar que as retas e as hélices do helicóide são levadas nas catenárias e nas circunferências do catenoide, respectivamente.

Além disso, todas as demais propriedades que dependam exclusivamente da primeira forma quadrática são compartilhadas por superfícies isométricas.

Referências Bibliográficas:

Tenenblat, K., *Introdução à Geometria Diferencial*, Brasília: EDUnB, 1988.

Revisado pelo Professor Fábio Vitoriano e Silva.

# Tópicos de Geometria Diferencial

## Superfícies Mínimas

VAZ, Fernando Henrique de Brito - EEC, UFG <sup>1 2</sup>

SILVA, Rosângela Maria da - IME, UFG <sup>3</sup>

### 1. RESUMO

Provavelmente, a parte mais interessante e representativa da geometria diferencial clássica é o estudo das superfícies. Existe vários casos especiais de superfícies, a saber, superfícies de revolução, superfícies regradas, superfícies mínimas, etc, que podem se tornar interessantes por si mesmas, como no caso das superfícies mínimas. Neste trabalho estudamos alguns exemplos de tais superfícies, e para isto fez-se necessário o estudo da teoria local das curvas no plano e no espaço, bem como a teoria local de superfícies parametrizadas regulares em  $\mathbb{R}^3$ .

**Palavras-chave:** *Superfícies de Revolução, Superfícies Regradas, Superfícies Mínimas.*

### 2. OBJETIVOS

Os objetivos desse trabalho foram:

- i) Estudar as superfícies parametrizadas regulares em  $\mathbb{R}^3$ ;
- ii) Estudar e dar alguns exemplos de superfícies de revolução, regradas e mínimas no espaço tridimensional;
- iii) Provar que, exceto o plano, em  $\mathbb{R}^3$ , a *catenóide* é a única superfície mínima de revolução, e o *helicóide* é a única superfície mínima regrada.

### 3. METODOLOGIA

Utilizamos neste plano de pesquisa a seguinte metodologia:

- Análise do problema proposto;
- Levantamento da bibliografia utilizada;
- Estudo individual e reuniões semanais com a orientadora;
- Análise dos resultados obtidos e a divulgação em congressos científicos.

<sup>1</sup>Agradecimento ao CNPq apoio financeiro.

<sup>2</sup>Contato: [fhenrique@live.fr](mailto:fhenrique@live.fr)

<sup>3</sup>Contato: [rosams@mat.ufg.br](mailto:rosams@mat.ufg.br)

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### Superfícies Parametrizadas Regulares

Assumindo que temos um sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$  em  $\mathbb{R}^3$  e consideremos uma função

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de duas variáveis  $u, v$  que variam em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Para cada  $(u, v) \in U$ ,  $X(u, v)$  determina um ponto de  $\mathbb{R}^3$ . Denotamos por  $S$  o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos pontos  $X(u, v)$ . Afim de que possamos utilizar as técnicas de cálculo diferencial ao estudo de superfícies vamos exigir a diferenciabilidade da função  $X$ . Além do mais, vamos nos restringir ao estudo de superfícies que em cada ponto admitem um plano tangente.

**Definição 1.** Uma *superfície parametrizada regular* ou simplesmente uma *superfície* é uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , tal que:

- $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ ;
- Para todo  $q = (u, v) \in U$ , a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é injetora.

As variáveis  $u, v$  são os *parâmetros* da superfície. O subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  obtido pela imagem da aplicação  $X$  é denominado *traço* de  $X$ .

A proposição seguinte fornece uma família de superfícies parametrizadas regulares, que descrevem o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^3$  obtidos pela rotação do traço de uma curva regular plana em torno de uma reta deste plano que não intercepta a curva.

**Proposição 1.** Seja  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ ,  $u \in I \subset \mathbb{R}$ , uma curva regular tal que  $f(u)$  não se anula. Então, a aplicação

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)),$$

onde  $u \in I$  e  $v \in \mathbb{R}$  é uma superfície parametrizada regular.

A aplicação  $X$  da proposição acima é denominada *superfície de rotação* da curva  $\alpha$  em torno do eixo  $Oz$ .

Agora, seja  $X(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  uma superfície parametrizada regular. Se considerarmos  $u$  e  $v$  com funções diferenciáveis de um parâmetro  $t$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , obtemos uma curva diferenciável  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  cujo traço está contido na superfície descrita por  $X$ . Sendo assim temos as seguintes definições

**Definição 2.** Se  $X(u, v)$  é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é um *vetor tangente* a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  se  $w = \alpha'(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ .

**Definição 3.** O *plano tangente* a  $X$  em  $(u_0, v_0)$  é o conjunto de todos os vetores tangentes a  $X$  em  $(u_0, v_0)$ , que denotamos por  $T_q X$ , onde  $q = (u_0, v_0)$ .

**Definição 4.** Se  $X(u, v)$  é uma superfície e  $q = (u_0, v_0)$ , dizemos que um vetor de  $\mathbb{R}^3$  é *normal* a  $X$  em  $q$  se é ortogonal a  $T_q X$ , isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a  $X$  em  $q$ .

Dado um plano tangente  $T_q X$ , existe uma única direção normal a esse plano e, portanto, existem exatamente dois vetores unitários normais a  $X$  em  $q$ . Daqui por diante, vamos fixar o vetor unitário normal a  $X$  em  $q$  como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Se o domínio da superfície  $X$  é um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , então, variando  $(u, v) \in U$ , temos uma aplicação diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , denominada *aplicação normal de Gauss*, definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v),$$

cujas imagem está contida na esfera unitária, centrada na origem.

Para desenvolver a teoria local das superfícies, temos que introduzir duas formas quadráticas: a primeira está relacionada com comprimento de curvas em uma superfície, ângulo entre vetores tangentes e área de regiões da superfície e a segunda com a curvatura das curvas na superfície.

**Definição 5.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  $\forall q \in U$ , uma aplicação

$$\begin{aligned} I_q : T_q X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longrightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \end{aligned}$$

é denominada a *primeira forma quadrática* de  $X$  em  $q$ .

**Definição 6.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Fixado  $q = (u_0, v_0) \in U$ , a *segunda forma quadrática* de  $X$  em  $q$  é uma aplicação  $II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$ , que para cada vetor  $w \in T_q X$  associa  $II_q(w)$  da seguinte forma: se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva diferenciável da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = q$  e  $\alpha'(t_0) = w$ , então definimos  $II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$ , onde  $N$  é o vetor normal a  $X$ .

Desta forma podemos introduzir o seguinte conceito

**Definição 7.** Seja  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $q = (u_0, v_0)$ . A *função curvatura normal* em  $q$  é uma aplicação  $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que, para cada vetor  $w \in T_q X$  não-nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

Podemos verificar, pelo próximo resultado, que a função curvatura normal admite um máximo e um mínimo, e estes valores máximo e mínimo da função curvatura normal em um ponto  $q$ , são chamados *curvaturas principais* e a partir destas podemos definir curvatura de Gauss e curvatura média.

**Proposição 2.** Sejam  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $k_n$  a função curvatura normal de  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$ . Então, existem vetores unitários e ortogonais  $w_1, w_2 \in T_q X$  tais que  $k_1 = k_n(w_1)$  e  $k_2 = k_n(w_2)$  são os valores mínimo e máximo da função  $k_n$ .

Com a notação da proposição anterior, os vetores  $w_1$  e  $w_2$  são chamados *vetores principais* de  $X$  em  $q$  e as curvaturas  $k_1$  e  $k_2$  são denominadas *curvaturas principais* de  $X$  em  $q$ . As direções de  $T_q X$  determinadas pelos vetores principais são chamadas *direções principais*.

O produto das curvaturas principais  $K(q) = k_1 k_2$ , denomina-se *curvatura Gaussiana* de  $X$  em  $q$  e a semi-soma de  $H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2}$  é chamada *curvatura média* de  $X$  em  $q$ .

## Superfícies Regradas

Uma família (diferenciável) a 1-parâmetro de retas  $\alpha(t), w(t)$  é uma correspondência que associa a cada  $t \in I$  um ponto  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$  e um vetor  $w(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $w(t) \neq 0$ , tais que ambos  $\alpha(t)$  e  $w(t)$  sejam diferenciáveis em  $t$ . Para cada  $t \in I$ , a reta  $L_t$  passando por  $\alpha(t)$  e que é gerada por  $w(t)$  é chamada *a reta da família em  $t$* .

Dada uma família a 1-parâmetro de retas  $\alpha(t), w(t)$ , a superfície parametrizada

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t), \quad t \in I, v \in \mathbb{R},$$

é chamada *superfície regradada* gerada pela família  $\alpha(t), w(t)$ . As retas  $L_t$  são chamadas as *geratrizes*, e a  $\alpha(t)$  é chamada uma *diretriz* da superfície  $X$ . A expressão superfície regradada é às vezes usada significando o traço de  $X$ . Deve-se observar que estamos admitindo a possibilidade de que  $X$  tenha pontos singulares, isto é, pontos  $(t, v)$  onde  $X_t \wedge X_v = 0$ .

## Superfícies Mínicas

Uma superfície parametrizada regular que tem a curvatura média identicamente nula é denominada *superfície mínima*. O traço de uma superfície parametrizada regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é *mínima* se cada uma de suas parametrizações é mínima.

Para explicar a razão de usarmos a palavra mínima para tais superfícies, precisamos introduzir a noção de variação. Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado  $D \subset U$  e um função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\bar{D}$  é a união do domínio  $D$  e sua fronteira  $\partial D$ . A *variação normal* de  $X(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , é a aplicação da por,

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u, v, t) = x(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  fixado e para um  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a aplicação  $X^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$$

é uma superfície parametrizada regular.

**Proposição 3.** Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado em  $U$ . Então  $X$  é mínima se e somente se  $A'(0) = 0$  para todo tal  $D$  e toda

variação normal  $X(\bar{D})$ , onde a função diferenciável  $A(t)$  denota a área de  $X^t(\bar{D})$ .

Assim, qualquer região limitada  $X(\bar{D})$  de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de  $X(\bar{D})$ . Deve-se notar que este ponto crítico pode não ser um mínimo e que isso faz a palavra mínima parecer um pouco estranha. No entanto, esta terminologia é consagrada pelo tempo, tendo sido introduzida por Lagrange (que foi o primeiro a definir uma superfície mínima) em 1760.

## Resultados Principais

**Teorema 1.** Qualquer superfície mínima de rotação em  $\mathbb{R}^3$  é, a menos de um movimento rígido, parte de um plano ou parte de um catenóide.

**Teorema 2.** Qualquer superfície mínima regular regrada de  $\mathbb{R}^3$  é, a menos de um movimento rígido, parte de um plano ou parte de um helicóide.

## 5. CONCLUSÕES

As superfícies mínimas são talvez as superfícies mais estudadas em geometria diferencial. A teoria desenvolveu-se em um ramo rico da geometria diferencial, no qual questões interessantes e não-triviais ainda estão sendo investigadas.

Deixamos a iniciativa do estudo dessas classes de superfícies que são muito amplas, extensas e bastante interessantes. Há uma grandiosidade de possibilidades e aprofundamentos no assunto. E este tema possui aplicações em várias áreas do conhecimento que não são exclusivamente matemáticas.

## 6. REFERÊNCIA

- [BC] Barbosa, J. L. M. e Colares, A. G., *Minimal Surface in  $\mathbb{R}^3$* , Instituto de Matemática e Pura e Aplicada, 1986.
- [C1] Carmo, M. P. do, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2005.
- [C2] Carmo, M. P. do, *Superfícies Mínimas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- [G] Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, vol. 1 e 2, Editora LTC, 2001.
- [HK] Hoffmann, K. e Kunze R., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971.
- [L] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Projeto Euclides, 1976.
- [T] Tenenblat, K., *Introdução à Geometria Diferencial*, Editora Blucher, 2008.