

# Implementação do algoritmo de Deutsch-Jozsa via interação dispersiva em cavidade supercondutora

Andiara P. dos Santos\*

*Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, 74.001-970, Goiânia (GO), Brasil.*

A. T. Avelar and B. Baseia

*Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, 74.001-970, Goiânia (GO), Brasil.*

Neste trabalho nós propomos um esquema para a implementação do algoritmo de Deutsch-Jozsa via interação dispersiva átomo-campo em eletrodinâmica quântica de cavidades. O esquema envolve dois átomos de Rydberg que atravessam uma cavidade supercondutora de microondas, duas zonas de Ramsey e detectores atômicos.

Keywords: algoritmo de Deutsch-Jozsa, cavidade de microondas

## I. INTRODUÇÃO

A computação quântica é uma área de pesquisa que vem sendo desenvolvida nas últimas duas décadas devido as vantagens potenciais de seus algoritmos, que prometem uma redução exponencial no tempo comparado aos seus análogos clássicos. No entanto, apenas alguns algoritmos quânticos estão disponíveis, como os algoritmos de Shor, Grover e Deutsch-Jozsa [1]. Neste trabalho será usado o algoritmo de Deutsch-Jozsa, que se caracteriza por ser o algoritmo quântico mais simples combinando o paralelismo quântico com a interferência. Para compreender o desempenho do algoritmo de Deutsch-Jozsa, consideremos o problema de saber se uma função booleana  $f(x)$  com  $2^n$  valores é constante ou balanceada (com 0 para a metade dos valores de  $x$ , e 1 para outra metade). Enquanto que um algoritmo clássico precisa de pelo menos  $2^{n-1} + 1$  consultas para concluir se a função é constante ou balanceada, o algoritmo Deutsch-Jozsa precisa apenas de uma consulta [2]. Obviamente, os algoritmos quânticos necessitam de aparatos físicos especiais para possam funcionar satisfatoriamente. A eletrodinâmica quântica de cavidades constitui um promissor cenário para investigar as potencialidades da computação quântica. Dessa forma faz-se necessário o estudo da computação quântica, pois futuramente, devido a constante miniaturização dos chips, as leis clássicas falharão e efeitos quânticos começarão a interferir nos aparatos clássicos.

## II. OBJETIVOS

De acordo com as razões mencionadas acima, queremos implementar o algoritmo de Deutsch-Jozsa em eletrodinâmica quântica de cavidade via interação dispersiva. A proposta consiste em usar átomos de Rydberg de dois níveis, duas zonas de Ramsey, uma cavidade supercondutora de microondas e detectores atômicos de ionização.

\*Electronic address.  
 andiara.fis@gmail.com

## III. METODOLOGIA

Será utilizado o formalismo da segunda quantização (representação de número, operadores de criação e aniquilação) para a descrição do campo eletromagnético quantizado e sua interação com a matéria através do modelo de Jaynes-Cummings. Será mostradas algumas noções básicas para a computação quântica e introduziremos o algoritmo de Deutsch-Jozsa.

### A. Noções básicas de computação quântica

O bit é o conceito fundamental da computação clássica. Ele é representado em um estado, 0 ou 1. Na computação quântica temos os chamados q-bits que também tem um estado,  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ . A diferença é que os q-bits podem estar em estados diferentes e é possível formar combinações de estados chamados superposições. Utilizando o primeiro postulado da mecânica quântica, temos:

**Postulado 1:** Existe, para cada sistema físico isolado, um espaço vetorial complexo com produto interno (ou seja, um espaço de Hilbert), conhecido como espaço de estados do sistema.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

onde  $|\psi\rangle$  pertence ao espaço vetorial complexo e  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  pode ser representado por:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Medindo o q-bit temos o estado 0 com probabilidade  $|\alpha|^2$  e o estado 1 com probabilidade  $|\beta|^2$ . Sabendo que um q-bit é um vetor unitário com espaço vetorial complexo temos que a soma das probabilidades deve ser igual a 1 :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4)$$

Com base nestas propriedades podemos fazer uso de algumas portas quânticas como:

- porta "não" representada por  $X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- porta "Hadamard" representada por:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ que aplicada na Eq.(2) temos:}$$

$$H \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

- porta não-controlado, ou CNOT representada por

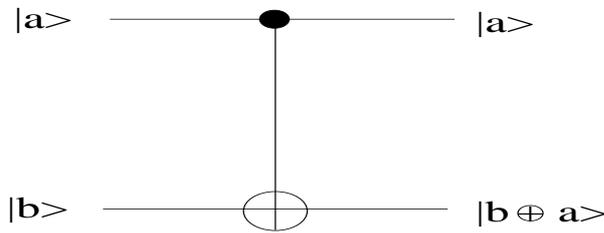


Figura 1: Porta CNOT

### B. Algoritmo de Deutsch

O paralelismo quântico é uma característica de muitos algoritmos quânticos e permite avaliar funções  $f(x)$  para muitos valores diferentes de  $x$  simultaneamente. Utilizaremos o algoritmo de Deutsch, que é um caso particular do algoritmo de Deutsch-Jozsa[3]. Vamos utilizar a porta Hadamard para preparar  $|0\rangle$  na superposição  $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$  e  $|1\rangle$  na superposição  $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ . Logo temos o estado de entrada:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle|1\rangle \quad (5)$$

e depois das duas portas Hadamard:

$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

quando a  $U_f$  é aplicada com a operação:

$$|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle, \quad (7)$$

temos:

$$|\psi_2\rangle = \begin{cases} \pm \left[ \frac{|0\rangle_i + |1\rangle_i}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle_j - |1\rangle_j}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) = f(1) \\ \pm \left[ \frac{|0\rangle_i - |1\rangle_i}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle_j - |1\rangle_j}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) \neq f(1) \end{cases} \quad (8)$$

Aplicando a porta Hadamard no primeiro q-bit encontramos:

$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} \pm |0\rangle_i \left[ \frac{|0\rangle_j - |1\rangle_j}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) = f(1) \\ \pm |1\rangle_i \left[ \frac{|0\rangle_j - |1\rangle_j}{\sqrt{2}} \right] & \text{se } f(0) \neq f(1) \end{cases} \quad (9)$$

Sabendo que  $f(0) \oplus f(1)$  ser 0 se  $f(0) = f(1)$  e 1 caso contrário, podemos escrever:

$$|\psi_3\rangle = \pm |f(0) \oplus f(1)\rangle_i \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_j - |1\rangle_j) \quad (10)$$

Onde  $i$  ( $j$ ) significa q-bit de entrada (saída),  $\oplus$  significa adição módulo 2 e  $x, y \in \{0, 1\}$ .

Podemos ainda reescrever a Eq.(8) da forma:

$$\frac{1}{2} [(-1)^{f(0)} |0\rangle_i + (-1)^{f(1)} |1\rangle_i] (|0\rangle_j - |1\rangle_j). \quad (11)$$

As quatro possibilidades para  $U_f$  é mostrada na tabela 1.

Tabela I: Função constante ou balanceada de um qubit binário.

$ x\rangle$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Agora a Eq.(10) pode ser escrita como:

$$|f(0) \oplus f(1)\rangle_i \otimes (|0\rangle_j - |1\rangle_j). \quad (12)$$

Dessa forma, a partir de uma consulta da função podemos dizer se a função é constante ou balanceada.

### C. Modelo de interação átomo-campo

O modelo de Jaynes-Cummings, proposto em 1963 nos fornece excelente intuição na descrição da interação átomo-campo. O hamiltoniano é descrito abaixo:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) + \hbar\Omega(\hat{a}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+) \quad (13)$$

onde  $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ,  $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$  e  $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ , para aproximação da onda girante temos o hamiltoniano de interação da forma:

$$\hat{V}_{JC} = \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \quad (14)$$

Quando aplicamos um campo elétrico externo na cavidade obtemos um alargamento nos níveis de energia do átomo, produzindo uma dissintonia entre as frequências de transição atômica e o campo na cavidade. Dessa forma, não há troca de fótons entre átomo e campo, mas apenas mudança de fase entre níveis internos do átomo, que apenas dependem do número de fótons dentro da cavidade.

$$\hat{H}_{ef} = \frac{\hbar g^2}{\delta} (\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_z + |i\rangle\langle i|) \quad (15)$$

onde  $\hat{\sigma}_z = |i\rangle\langle i| - |e\rangle\langle e|$ . A evolução do sistema é dado por:

$$\hat{U}_t = e^{i\pi(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)}|i\rangle\langle i| + e^{i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}}|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| \quad (16)$$

#### D. Arranjo experimental

A proposta experimental, mostrada na Fig.(2), onde a fonte  $S_A$  ejetta átomos de rubídio, um de cada vez, que estão com uma velocidade selecionada e prepara num estado circular de Rydberg por feixes de laser apropriado na zona de excitação. Os níveis atômicos relevantes  $|g\rangle, |e\rangle$  e  $|i\rangle$  que os números quânticos principais 49, 50 e 51, fornecem as transições atômicas de 54, 51 e 1GHz. Passam pelas zonas de Ramsey  $R_1$  e  $R_2$  que aplicam um pulso ressonante  $\pi/2$  na transição de  $e \rightarrow g$ . A cavidade de microondas C é um ressonador de Fabry-Perot feito de dois espelhos esféricos de nióbio. Estas cavidades são preparadas no ponto baixo de temperatura de  $T \simeq 0,6K$  para reduzir o número médio de fótons térmicos e antes de começar o experimento, o campo térmico é apagado[8].

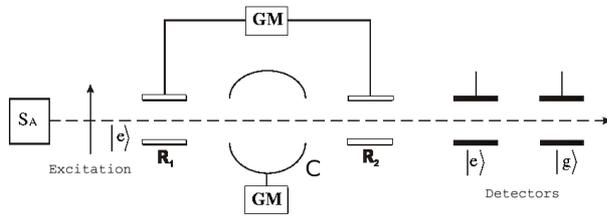


Figura 2: Aparato experimental.

#### IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para implementação do algoritmo de Deutsch-Jozsa em cavidade de microondas é necessário fazer duas operações:

- A primeira é quando o átomo passa pelas zonas de Ramsey  $R_1$  e  $R_2$  e interage com o campo clássico ressonante para a transição atômica entre os estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , com intensidade ajustada para produzir uma rotação  $\pi/2$  no átomo, onde:

$$|e\rangle \rightarrow \frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \quad e |g\rangle \rightarrow \frac{|g\rangle - |e\rangle}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

- A segunda operação ocorre na cavidade C onde há uma interação átomo campo dispersiva com a cavidade em um único modo. A interação dispersiva é descrita pelo hamiltoniano[8]:

$$H_{ef} = \hbar \frac{g^2}{\delta} [(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|i\rangle\langle i| - \hat{a}^\dagger\hat{a}|e\rangle\langle e|] \quad (18)$$

onde  $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$  é o operador de aniquilação (criação) para o modo da cavidade;  $|i\rangle\langle i|$  e  $|e\rangle\langle e|$  são os projetores. Usando o efeito

Stark escolhemos o regime dispersivo, isto é,  $g^2\langle n\rangle/\delta \ll 1$ ;  $\langle n\rangle$  é o número médio de fótons na cavidade e  $\delta$  é a dissintonia de entre a transição atômica e o modo  $\beta$ . O operador de evolução associado com a Eq.(18) é:

$$\hat{U}_{ef} = e^{i\phi\beta\hat{a}^\dagger\hat{a}}|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|. \quad (19)$$

onde  $\phi = g^2t/\delta$  e  $t$  é o tempo de interação átomo-campo.

Considere o primeiro átomo preparado no estado excitado  $|e\rangle_1$  passando como exibido na Fig.(2). Na cavidade, ele interage dispersivamente com o modo do campo preparado no estado coerente  $|\alpha\rangle$ . O tempo é ajustado para produzir um deslocamento de fase  $\pi$  no estado do campo. A tabela abaixo mostra a evolução do sistema inteiro.

Tabela II: Evolução de todo sistema.

posição atômica	$ \Psi\rangle_{\text{átomo} + \text{campo}}$
antes $R_1$ :	$ e\rangle_1 -\alpha\rangle$
depois $R_1$ :	$( g\rangle_1 +  e\rangle_1) -\alpha\rangle$
depois C:	$ g\rangle_1 -\alpha\rangle +  e\rangle_1 \alpha\rangle$
depois $R_2$ :	$ g\rangle_1( \alpha\rangle +  -\alpha\rangle) +  e\rangle_1( \alpha\rangle -  -\alpha\rangle)$

Vamos usar a seguinte notação:  $|e\rangle = |0\rangle_a, |g\rangle = |1\rangle_a, |\alpha\rangle = |0\rangle_f, |-\alpha\rangle = |1\rangle_f$ . Em seguida, enviamos o segundo átomo no estado  $|e\rangle$  que atravessa toda a configuração, onde o estado do campo é dado pela superposição  $(|0\rangle_j - |1\rangle_j)$  obtida na etapa anterior. Após o átomo atravessar  $R_1$  temos:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_a + |1\rangle_a)(|0\rangle_f - |1\rangle_f) \quad (20)$$

passando agora na cavidade dispersiva:

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{2} \left[ (-1)^{f(0)}|0\rangle_a + (-1)^{f(1)}|1\rangle_a \right] \otimes (|0\rangle_f - |1\rangle_f) \quad (21)$$

(a) Para  $f(0) = f(1) = 0$  a interação átomo-campo dispersiva se mantém a mesma

$$\frac{1}{2} [|0\rangle_a + |1\rangle_a] (|0\rangle_f + |1\rangle_f) \quad (22)$$

(b) Para  $f(0) = f(1) = 1$  o tempo de interação do átomo é ajustado para  $\phi = \pi$ . Depois disso, o átomo passa por uma zona de Ramsey que está dentro da cavidade e faz  $|g\rangle \rightarrow |-\ g\rangle$ .

$$\frac{1}{2} [-|0\rangle_a - |1\rangle_a] (|0\rangle_f + |1\rangle_f) \quad (23)$$

(c) Para  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$  interação átomo-campo dispersiva se mantém a mesma. Depois disso, o átomo passa por uma zona de Ramsey que está dentro da cavidade e faz  $|g\rangle$

$$\frac{1}{2} [|0\rangle_a - |1\rangle_a] (|0\rangle_f + |1\rangle_f) \quad (24)$$

(d) Para  $f(0) = 1$  e  $f(1) = 0$  o tempo de interação do átomo é ajustado para  $\phi = \pi$ .

$$\frac{1}{2} [ -|0\rangle_a + |1\rangle_a ] ( |0\rangle_f + |1\rangle_f ) \quad (25)$$

Depois que o átomo passar pela cavidade teremos o  $|\varphi_3\rangle$  que atua somente no primeiro q-bit.

## V. CONCLUSÃO

Propomos um esquema experimental para implementar o algoritmo de Deutsch-Jozsa em eletrodinâmica quântica de cavidades usando dois átomos de Rydberg sucessivos que in-

teragem dispersivelmente com o modo do campo de uma cavidade de microondas. Sendo o algoritmo de Deutsch-Jozsa o mais simples dos algoritmos quânticos existentes, é o primeiro a ressaltar as vantagens da teoria quântica, aplicada à computação, sobre as clássicas. Dessa forma, o estudo e as aplicações que foram feitas neste trabalho foram bastante satisfatórias.

## Agradecimentos

Ao CNPq, por nos dar condições à pesquisa e ao apoio que Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás nos fornece.

- 
- [1] M. A. Nilsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000).
  - [2] D. Deutsch and R. Jozsa, *Proc. R. Soc. A* 439, 553 (1992).
  - [3] D. Deutsch, *Proc. R. Soc. A* 400, 97 (1985).
  - [4] M. Mohseni *et al.*, *Phys. Rev. A* 91, 187903 (2003)
  - [5] M. S. Tame *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 98, 140501 (2007)
  - [6] S. Gulde *et al.*, *Nature* 421, 48 (2003).
  - [7] I. L. Chuang *et al.*, *Nature (London)* 393, 143 (1998).
  - [8] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* 73, 565 (2001).
  - [9] S-B Zheng, *Phys. Rev. A* 70, 034301 (2004).
  - [10] Y. Rong-Can and L. Hong-Cai, *Chin. Phys.* 15, 2320 (2006)
  - [11] W-X Wing *et al.*, *J. Phys. A* 40, 155 (2007).
  - [12] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. B. Hoff, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Nature* 446, 297 (2007); S. Kuhr *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* 90 (16) 164101.