# Grafos Equi-Emparelháveis

CENTENO, Carmen Cecilia
Instituto de Informática
carmen@inf.ufg.br

BARBOSA, Rommel Melgaço
Instituto de Informática
rommel@inf.ufg.br

**Palavras-Chave:** Grafo Equi-Emparelhável, Grafo Fator-Critico, Grafo Cúbico, Grafo 3-Politopo.

## 1. Introdução

Um grafo G = (V,E) é um conjunto de vértices V (G) ,um conjunto de arestas E(G), e uma relação que associa a cada aresta dois vértices, os quais chamaremos de extremos. Nomeamos (uv) a aresta que liga o vértice u ao vértice v. Um **emparelhamento** M em um grafo G é um conjunto de arestas (uv) que pertencem ao grafo G, as quais não compartilham vértices, os vértices u e v são ditos saturados por M. Este emparelhamento M é **maximal** se não é possível adicionar arestas a E(M), e é **máximo** se for um emparelhamento maximal que contém o maior número de arestas. Todo emparelhamento máximo é maximal, porém nem todo maximal é máximo. Um grafo G é **equi-emparelhável** se todo emparelhamento maximal é máximo.

Um conjunto independente em um grafo G=(V,E) é um conjunto de vértices S contido ou igual a V(G) tal que para todo vértice u e v pertencente a S, a aresta uv não pertença a E(G). Um conjunto independete é maximal se não é subconjunto próprio de outro conjunto independente e é máximo se tem cardinalidade máxima. A cardinalidade de um conjunto independente máximo em um grafo G é o número de independência de G. Um grafo G é **bem-coberto**, se todo conjunto independente maximal de vértices em G tem a mesma cardinalidade.

O problema de responder se um grafo é bem-coberto é o mesmo problema de responder se um grafo é equi-emparelhável, porém o primeiro é aplicado a vértices, já o segundo a arestas. Para problema de grafos bem-cobertos ainda não há algoritmo eficiente que o resolva, por outro lado, um algoritmo de tempo polinomial para o reconhecimento de grafos equi-emparelháveis foi desenvolvido por Plummer, Lesk e Pulleyblank [7]. Tal algoritmo auxilia a resolução do problema de grafos bem-cobertos livres de $K_{1,3}$. Além do algoritmo algumas caracterizações foram feitas, sendo estas: grafos equi-emparelháveis e fator critico, grafos equi-emparelháveis e cúbicos, e grafos equi-emparelháveis e 3-politopos.

A determinação de um grafo equi-emparelhável é interessante, pois independente do emparelhamento maximal saberemos que este também é máximo. Então, gostariamos de saber como construir tais grafos, e não apenas reconhece-los. Sendo assim objetivamos caracterizar classes de grafos equi-emparelháveis, como a classe dos grafos bipartidos convexos. Um grafo bipartido G=(A,B,E) é **convexo** no conjunto de vértices A se A pode ser ordenado tal que para cada elemento b no conjunto de vértices B os elementos de A conectados com b formam um intervalo de A.   Exemplo, G=(A,B,E) é um grafo onde A= {1,2,3,4,5}, B = { 6,7,8} e E = { {1,6},{1,8}, {2,6},{2,8},{3,6},{4,6},{4,7},{5,7}}.

## 2. Método

O estudo de grafos equi-emparelháveis tem três principais artigos publicados sendo eles:

- Equi-matchable graphs de M. Lesk, M. Plummer, W. R. Pulleyblank [7]
- Equimatchable factor-critical graphs de Odile Favaron [4].
- On two equimatchable graph classes de Ken-ich Kawarabayashi, Michael D. Plummer e Akira Saito [6]

O entendimento de tais artigos requer um estudo dos conceitos básicos da teoria dos grafos, bem como o conhecimento dos teoremas e algoritmos desenvolvidos sobre emparelhamento.

Através da leitura do material relacionado na bibliografia propomos relatar o histórico sobre emparelhamento e os teoremas utilizados para o desenvolvimento da teoria de equi-emparelhamento, bem como traçar um relacionamento entre grafos equi-emparelháveis e outras classes de grafos, inicialmente a classe dos grafos bipartidos convexos.

## 3. Resultados

A teoria do emparelhamento teve aplicação em diversos problemas computacionais desde que foi proposta. O estudo de emparelhamento em grafos bipartidos é extenso e diversos algoritmos para achar emparelhamento máximo foram desenvolvidos.

O problema de grafos equi-emparelháveis foi proposto em 1974 por B. Grunbaum [5]. Uma caracterização de grafos equi-emparelháveis foi desenvolvida por Meng [9] e outra por Lewin [8], as quais, posteriormente, foram provadas não ser uma boa caracterização no ponto de vista da estrutura do grafo e da complexidade do algoritmo. Em 1984, Lesk, Plummer e Pulleyblank [7] apresentaram um algoritmo o qual reconhece se um grafo pertence à classe dos grafos equi-emparelháveis ou não em um tempo polinomial. Este algoritmo foi desenvolvido com base na decomposição de Gallai Edmonds a qual divide os vértices de um grafo em três conjuntos, estes nomeados A,D, e C. Tais conjuntos possuem propriedades inerentes ao emparelhamento máximo, e é através de tais propriedades que os autores desenvolvem caracterizações que os levam a um algoritmo eficiente para o reconhecimento de equi-emparelhamento.

O algoritmo desenvolvido trabalha com três classes de grafos, sendo elas: 1) grafos que possuem emparelhamento perfeito, ou seja, grafos que possuem um emparelhamento que sature todos os vértices; 2) grafos fator critico, ou seja, grafos que retirados qualquer um de seus vértices, o grafo resultante terá um emparelhamento perfeito; 3) grafos bipartidos, grafos onde os vértices podem ser divididos em dois conjuntos independentes, chamados conjuntos de partição. Estas classes de grafos são caracterizadas no decorrer do artigo e tais caracterizações resultam em algoritmos eficientes para o reconhecimento de equi-emparelhamento.

O procedimento para verificar se um grafo é equi-emparelhável ou não se inicia com a busca de um emparelhamento máximo. Se este emparelhamento for um emparelhamento perfeito, ou seja, se emparelhamento cobre todos os vértices do grafo, é aplicado Teorema sobre grafos randomicamente emparelháveis, desenvolvido por Sumner [10]. Através de tal Teorema conclui-se que o grafo deve ser um $K_{n,n}$ ou um $K_{2n}$.

Caso o grafo não possua emparelhamento perfeito é obtida a decomposição de Gallai-Edmonds, tal decomposição pode ser obtida em tempo polinomial, através do algoritmo de emparelhamento máximo desenvolvido por Edmonds. Utilizando a decomposição de Gallai-Edmonds é possível verificar se o grafo é fator critico.

Os autores desenvolvem uma caracterização para grafos equi-emparelháveis fator-critico, e através desta é obtido um algoritmo de tempo polinomial que verifica se o grafo é equi-emparelhável ou não.

Caso o grafo não seja fator critico e não possua emparelhamento perfeito, verificam-se certas condições para os conjuntos C, A, e D. Caso todas as condições sobre os conjuntos sejam satisfeitas, reduz-se o grafo a um grafo bipartido. Um grafo bipartido é um grafo onde o conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos de vértices independentes. Após a redução continua-se executando o algoritmo. Caso as condições para os conjuntos C,A e D não sejam satisfeitas conclui-se que o grafo não é equi-emparelhável.

Após obter o grafo bipartido, o algoritmo verifica se este é equi-emparelhável, caso o grafo bipartido seja equi-emparelhável o grafo original também o será. Tal reconhecimento foi obtido através da caracterização de grafos bipartidos desenvolvida pelos autores.

O trabalho de Plummer, Lesk e Pulleyblank fornece um algoritmo de tempo polinomial que resolve se um grafo é equi-emparelhável ou não, porém ele fornece pouca informação sobre a caracterização de classes de grafos equi-emparelháveis. Tais caracterizações são trabalhadas por Odile Favaron em seu artigo Grafos Fator-Critico Equi-emparelhável e por Kawarabayashi, Plummer, Saito no artigo Sobre Duas Classes de Grafos Equi-emparelháveis.

Odile Favaron caracteriza grafos equi-emparelháveis fator critico (EFC) no qual a conectividade de vértice é um ou dois. Odile Favaron ainda prova que todo grafo fator critico dois conexo é um grafo hamiltoniano.

No segundo artigo citado, Kawarabayashi, Plummer, Saito apresentam duas classes de grafos equi-emparelhavéis. A primeira é a classe dos grafos planares, 3-conexo, equi-emparelhável. Os autores provam existir somente vinte e três grafos que atendam tais requisitos. No mesmo artigo os autores ainda provam existir somente dois grafos cúbicos equi-emparelháveis, sendo eles $K_4$ ou $K_{3,3}$. Grafos cúbicos são grafos onde todo vértice possui grau três.

A nossa proposta de trabalho é fazer uma análise critica dos artigos mencionados acima, propondo novas contribuições, bem como, estudar classes de grafos e propor uma relação entre estas e a classe de grafos equi-emparelháveis.

## 4. Conclusões

Um problema semelhante ao problema de grafos equi-emparelháveis, é o de grafos bem-cobertos, o qual seria a mesma formulação do problema de equi-emparelhamento, porém aplicados a vértices. Para o problema de grafos bem cobertos não se conhece algoritmo que o resolva em tempo polinomial. Porém nos grafos que podem ser grafos linha de um grafo qualquer, podemos aplicar o algoritmo de equi-emparelhamento e responder se grafo é bem coberto ou não.

Mas nem todos os grafos são grafos linhas, o que reduz a classe de grafos os quais podemos classificar como bem-cobertos ou não. Devido à dificuldade de se reconhecer um grafo bem-coberto, diversas classes destes foram caracterizadas. As classes de grafos equi-emparelháveis caracterizados até o momento são:

- Grafos equi-emparelháveis cúbicos, $K_4$ ou $K_{3,3.}$
- Grafos equi-emparelháveis e 3-politopos, que se resumem em 23 grafos.
- Grafos equi-emparelháveis com emparelhamento perfeito, que são os $K_{2m}$ ou $K_{m,m}$
- Grafos equi-emparelháveis fator critico 1-conexo
- Grafos equi-emparelháveis fator critico 2-conexo

Uma das vantagens de sabermos se um grafo é equi-emparelhável ou não, é a possibilidade da simples aplicação de um algoritmo guloso para se determinar um emparelhamento máximo, já que todos os emparelhamentos maximais são máximos. Desta forma seria interessante sabermos como construir grafos equi-emparelháveis, problema este que vem sendo estudado por nós e que se tornou o principal objetivo de nosso trabalho.

Devido as poucas caracterizações somos capazes apenas de criar infinitos grafos equi-emparelháveis fator critico 1-conexo ou 2 conexo, utilizando a caracterização de Odile Favaron. Podemos também criar infinitos grafos com emparelhamento perfeito, que se resumem em $K_{2m}$ ou $K_{m,m}$. E ainda uma limitada familia de grafos equi-emparelháveis cúbicos ou 3-politopos.

Uma outra forma de se construir infinitos grafos equi-emparelháveis é utilizando o conceito de grafo linha e grafo bem-coberto. Suponha que H seja o grafo linha de G, então dado um grafo G qualquer bem-coberto, achamos H que será equi-emparenhável. Porém o grafo H pode perder propriedades inerentes a G durante a sua transformação.

## Referências


[1] BERMOND, J. C. **Hamiltonian Graphs**. Selected Topics in Graph Theory. Academic, New York (1979) 127-167

[2] CHVáTAL, V.; SLATER, P. **A note on well-covered graphs**. Quo Vadis Graph Theory?, p. 179–182, 1993.

[3] DIESTEL, R. **Graph Theory**. Springer, 2000.

[4] FAVARON, O. **Equimatchable factor-critical graphs**. J. Graph Theory, 10:439–448, 1986.

[5] GRUNBAUM, B. **Matchings in polytopal graphs**. Networks, 4:175–190, 1974.

[6] KAWARABAYASHI K., M. P; SAITO, A. **On two equimatchable graph classes**. Discrete Mathematics, 266:263–274, 2003.

[7] LESK M., M. P; PULLEYBLANK, W. R. **Equi-matchable graphs**. Academic Press, 1984.

[8] LEWIN M., **Matching-perfect and cover-perfect graphs**. Israel J. Math. 18 (1974), 345-347.

[9] MENG, C. **Matchings and coverings for graphs**. PhD Thesis, Michigan State University, East Lansing, 1974.

[10] SUMNER, D. **Randomly matchable graphs**. Journal of Graph Theory, 3:183–186, 1979.

[11] TANKUS, D.; TARSI, **M. Well-covered Claw-Free Graphs**. Journal of Combinatorial Theory, v. 66, p. 293–302, 1996.
[12] WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. Prentice Hall, 2001.