

MAPEAMENTO DAS LINHAS EQUIPOTENCIAIS E DE CAMPO E CÁLCULO DA CAPACITÂNCIA UTILIZANDO A TRANSFORMAÇÃO DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

CALIXTO, Wesley Pacheco¹; ALVARENGA, Bernardo²
¹wpcalixto@gmail.com
²bernardo@eee.ufg.br

Escola de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal de Goiás
Núcleo de Estudo e Pesquisa em Processamento da Energia e Qualidade – PEQ
Praça Universitária, S/N Goiânia — GO — 74.605-220
Tel: +55(62)3209-6070, Fax: +55(62)3521-1806

Palavras-chaves — Capacitor Cilíndrico, Transformações Bilineares, Transformação de Schwarz-Christoffel, Métodos Numéricos.

I. INTRODUÇÃO

O estudo aqui apresentado tem como objetivo determinar as equipotenciais, as linhas de campo e a capacitância, entre duas placas condutoras semi-cilíndricas, com um dielétrico de permissividade ϵ em seu interior, usando o programa Scilab que é um ambiente utilizado no desenvolvimento de algoritmo para a resolução de problemas numéricos, este é um programa *Free Software* e *Open Source Software*. Na análise, é empregada uma transformação conforme e uma transformação de Schwarz-Christoffel. Os resultados obtidos pelos métodos numéricos no Scilab são comparados com simulações por elementos finitos, utilizando o programa *FLUX2D*.

Considera-se um capacitor cilíndrico contendo uma placa com potencial de $10 V$ e a outra com potencial zero, e no interior das placas, um dielétrico de permissividade ϵ ($F.m^{-1}$) [1]. Considera-se também que o capacitor tem profundidade d (m) e está imerso em um meio de permissividade infinita [2]. Para efetuar os cálculos deste problema, propõe-se transformá-lo em um problema mais simples, usando de uma transformação bilinear, seguida de uma transformação de Schwarz-Christoffel.

II. TRANSFORMAÇÃO BILINEAR

Admitindo que a seção transversal do capacitor constitua uma geometria inserida num plano cartesiano z , define-se a transformação bilinear $w(z)$ [3]–[4], que leva os pontos do plano z nos pontos do plano cartesiano w , segundo (1).

$$w(z) = \beta \cdot \frac{z - R_0}{z + R_0} \quad (1)$$

na qual R_0 (m) é o raio do capacitor. β é uma constante complexa definida por (2).

$$\beta = \frac{e^{j \cdot \alpha} + 1}{e^{j \cdot \alpha} - 1} \quad (2)$$

na qual α (*rad*) está associado ao espaçamento angular entre as placas em relação ao eixo das abscissas, Fig. 1a.

A relação (1) mapeia os pontos no interior do círculo definido pelo capacitor, em pontos no semi-plano superior do plano cartesiano w . Particularmente os pontos sobre a borda da circunferência de raio R_0 no plano z , são mapeados nos pontos sobre o eixo real do plano w , conforme as Fig. 1a e 1b.

III. TRANSFORMAÇÃO DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

Utiliza-se a transformação de Schwarz-Christoffel [5]-[7], para transformar a geometria da Fig. 1b, do plano w , em um capacitor de placas paralelas no plano cartesiano t .

A expressão da transformação que leva o semi-plano superior do plano w no interior de um retângulo no plano t é definida pela integral elíptica:

$$t(w) = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2) \cdot (1-K^2w^2)}} \quad \text{com } K = \frac{1}{a} \quad (3)$$

na qual $a > 1$, neste caso a é numericamente igual ao ponto mais distante da origem na parte positiva sobre o eixo das abscissas, e K é o módulo da integral elíptica.

O domínio obtido representa um capacitor de placas paralelas no plano t , conforme a Fig. 1c. Os pontos localizados no semi-plano superior do plano w são mapeados no interior do polígono delimitado pelas placas paralelas, e o eixo das abscissas, na borda do polígono do plano t .

No Scilab [9]-[10] a função usada para definir a transformação (3) é:

$$H(w) = delip\left(w_0, \left(\frac{1}{a}\right)\right) \quad (4)$$

na qual em (4), $H(w) = t(w)$, w_0 é a pré-imagem de t_0 .

IV. TRANSFORMAÇÕES INVERSAS

O cálculo da capacitância do dispositivo obtido no plano t é simples. O mesmo se dá com o traçado das linhas equipotenciais e de campo neste plano. Então é possível desenhar estas linhas no plano t e mapeá-las nos planos w e z , consecutivamente. Isto é realizado através das transformações inversas.

A inversa da Transformação de Schwarz-Christoffel é uma função elíptica de Jacobi [6], definida por:

$$w(t) = sn(t | m) \quad (5)$$

Em (5) a constante $m = k^2$ é chamada de parâmetro da função elíptica [6]. No Scilab a função usada para definir a função elíptica [9]-[11] de Jacobi é:

$$G(t) = \%sn\left(t_0, \left(\frac{1}{a}\right)^2\right) \quad (6)$$

na qual em (6), $G(t) = w(t)$, t_0 é a imagens de w_0 .

A manipulação algébrica de (1) permite obter a transformação que leva pontos do plano w em pontos no plano z . Esta transformação é dada por:

$$z(w) = R_0 \cdot \frac{\beta + w}{\beta - w} \quad (7)$$

V. EQUIPOTENCIAIS E LINHAS DE CAMPO

Adotando $R_0 = 5mm$ e $\alpha = \pi/12$, obtém-se a correspondência dos pontos relevantes nos planos z , w e t .

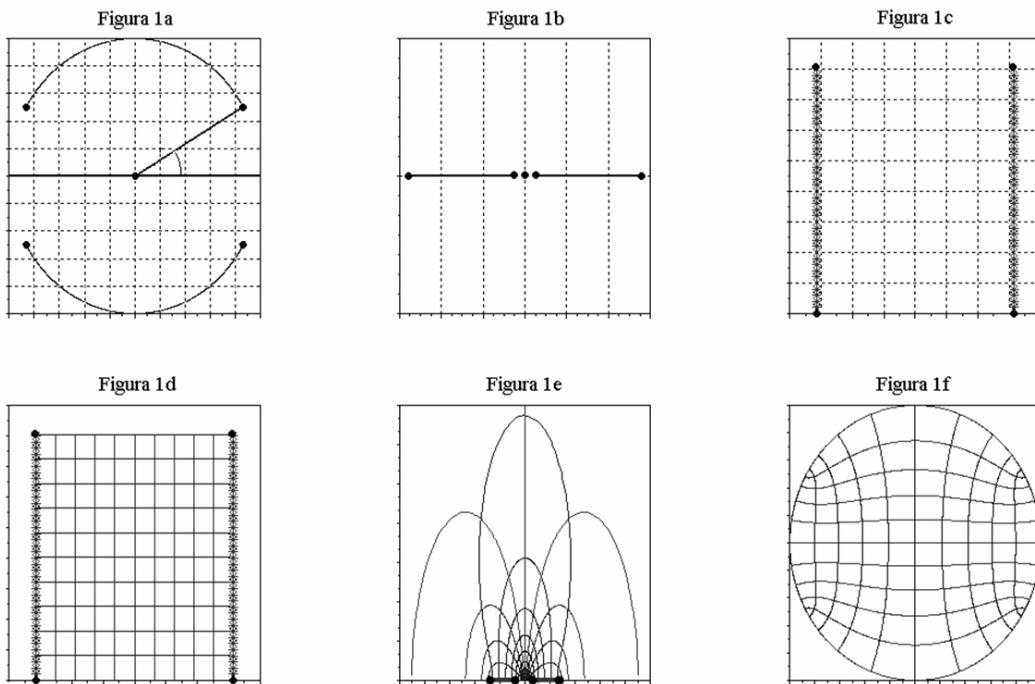


Fig. 1. Processo de Mapeamento das Linhas de equipotenciais e de Campo.

O traçado das equipotenciais e das linhas de campo no plano t é mostrado na Fig. 1d.

Portanto de posse de (5) pode-se mapear as equipotenciais e as linhas de campo do plano t no plano w , conforme Fig. 1e.

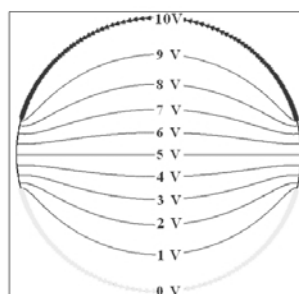


Fig. 2. Equipotenciais representadas no plano z pelo FLUX2D.

Da mesma forma, utilizando (7), as equipotenciais e as linhas de campo do plano w podem ser mapeadas no plano z , conforme ilustrado na Fig. 1f.

Na Fig. 2, temos as equipotenciais calculadas no plano z pelo programa FLUX2D[8].

VI. CAPACITÂNCIA

Da teoria eletromagnética, segue que a capacitância do dispositivo da Fig. 1c, um capacitor de placas paralelas é dada por:

$$C = \varepsilon \cdot \frac{b \cdot d}{l} \quad (8)$$

na qual: b = altura da placa (m) e l = distância entre as placas (m), ε ($F \cdot m^{-1}$) é a permissividade no interior do dielétrico e d (m) é a profundidade do capacitor, admitindo $d = 5 \text{ mm}$ e $\varepsilon = \varepsilon_0$, podemos encontrar a capacitância do dispositivo.

VII. RESULTADOS

Verifica-se na Fig. 1f e Fig. 2, as linhas de equipotencial mapeadas no plano z pelos programas Scilab e FLUX2D, respectivamente. Verifica-se ainda na Tabela I os valores da capacitância obtidos pelo programa Scilab utilizando (8), e pelo programa FLUX2D.

Métodos Numéricos Scilab	Métodos Elementos Finitos FLUX2D
0,07663 pF	0,07696 pF

VIII. CONCLUSÃO

As transformações conformes têm a propriedade de apenas modificar a geometria, preservando as grandezas físicas correspondentes aos pontos do plano.

Através deste estudo foi possível determinar as equipotenciais, as linhas de campo e a capacitância entre duas placas condutoras semi-cilíndricas, com um dielétrico de permissividade ε em seu interior.

Vários problemas eletromagnéticos podem ser resolvidos utilizando métodos numéricos em programa *Free Software*. Os resultados obtidos pelos métodos numéricos e implementados no Scilab foram satisfatórios quando comparados aos do programa FLUX2D.

IX REFERÊNCIAS

- [1] Collins, Royal E. *Mathematical Methods for Physicists and Engineers*. Dover Publications. New York, 2ª ed., 1999.
- [2] Churchill, Ruel V. *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*. Editora da USP. Brasil, 1975.

- [3] Moretti, Gino. Functions of a Complex Variable. Prentice-Hall of India Private Limited. New Delhi, 1968
- [4] Kraus, John. Carver, Keith, R. Eletromagnetismo. Editora Guanabara. Rio de Janeiro. Brasil. 1986.
- [5] Walker, Miles. The Schwarz-Christoffel Transformation and Its Applications – A Simple Exposition. Dover Publications. New York, 1964
- [6] Abramowitz, Milton. Stegun, Irene A. Handbook of Mathematical Functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover Publications. New York, 1968.
- [7] Gibbs, W. J. Conformal Transformations in Electrical Engineering. Chapman & Hall. London, 1958
- [8] FLUX2D User's Guide. CEDRAT. Grenoble, 2000.
- [9] Scilab Group, Introduction to Scilab - User's Guide. disponível em http://indexation.inria.fr/search/public?_q=scilab&_l=en&search.x=10&search.y=11, acessada em dezembro de 2005..
- [10] Pires, Paulo S. Motta, Métodos Computacionais. Introdução ao Scilab 3.0. disponível em <http://www.dca.ufrn.br/~pmotta/sciport-3.0.pdf>, acessada em dezembro de 2005.
- [11] Pires, Paulo S. Motta, Rogers, David A. Free/Open Source Software: An Alternative for Engineering Students, 32nd ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference, Nov. 6-9, 2002, Boston, MA, USA, disponível em <http://fie.engrng.pitt.edu/fie2002/papers/1355.pdf>. acessada em dezembro de 2005.