Propriedade Analítica da Trajetória Central em um ponto da fronteira para Programação Linear

Erika Morais Martins [*] Dr. Orizon Pereira Ferreira [†]
erika@inf.ufg.br orizon@mat.ufg.br

1 Introdução

O Problema de Programação Linear (PPL) é o problema de otimizar uma função linear, sujeito à restrições também lineares. O método simplex é muito eficiente, na prática, para resolver o PPL. O algoritmo simplex consiste em caminhar pela fronteira do conjunto viável, através de pontos extremos adjacentes, otimizando o valor da função objetivo com relação aos pontos extremos anteriores até atingir uma solução ótima, se existir. Por esse motivo o algoritmo simplex tem um comportamento exponencial no pior caso.

Diferentemente do método simplex os algoritmos denominados "Algoritmos de Pontos Interiores", geram uma seqüência de soluções que caminham pelo interior do conjunto viável do PPL, seguindo em algum sentido a trajetória central. Os algoritmos de pontos interiores têm comportamento polinomial no pior caso.

Neste sentido, a trajetória central tem importância fundamental no estudo de vários algoritmos para resolução do PPL. Estudando seu comportamento estaremos estimando o melhor comportamento que um algoritmo de ponto interior, que segue a trajetória central, pode obter. Desta forma, nosso objetivo neste trabalho é estudar o comportamento da Trajetória Central no seu ponto limite.

2 Metodologia

A metodologia adotada foi:

- Encontros semanais com o orientador
- Apresentação de seminários
- Leitura dos artigos [1] e [2]

[*] Instituto de Informática, UFG – Aluna do Mestrado, Bolsista CAPES.
[†] Instituto de Matemática, UFG – Orientador.

3 Resultados e discussão

O *Problema de Programação Linear* (PPL) primal no formato padrão é o seguinte problema de Otimização:

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} minimizar & c^T x \\ sujeito\ \ a: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde $A \in M_{m\times n}(I\!R)$, com $m \leq n$, $b \in I\!R^m$ e $c \in I\!R^n$, são os dados do problema, e os pontos $x \in I\!R^n$ são as variáveis primais.

A seguir faremos algumas notações associadas ao problema (P). O conjunto

$$\mathcal{F}(P) = \{x \in I\!R^n; Ax = b, x \geq 0\}$$

é chamado conjunto viável e um ponto $x \in \mathcal{F}(P)$ é denominado ponto viável. O conjunto

$$\mathcal{F}^0(P) = \{x \in I\!R^n; Ax = b, x > 0\}$$

é chamado conjunto de pontos interiores viáveis e um ponto deste conjunto é denominado ponto interior viável. O conjunto

$$P^* = \{x^* \in \mathcal{F}(\mathcal{P}); c^T x^* \leq c^T x, \text{ para todo } x \in \mathcal{F}(P)\}$$

é chamado conjunto de soluções ótimas e um ponto $x^* \in P^*$ é denominado solução ótima.

Resolver o problema (P) consiste em encontrar um ponto $x^* \in P^*$ isto é, que P^* é não vazio, ou mostrar que $\mathcal{F}(P)$ é vazio, isto é que o problema (P) é inviável, ou ainda, mostrar que a função objetivo é ilimitada no conjunto viável, ou seja, (P) é um problema ilimitado.

O problema dual correspondente ao problema primal (P), é o seguinte problema de Otimização:

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} maximizar & b^T y \\ sujeito\ \ a: & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

onde $y \in I\!R^m$ e $s \in I\!R^n$ são as variáveis duais.

A seguir, faremos algumas definições associadas ao problema (D). O conjunto

$$\mathcal{F}(D) = \{(y, s) \in I\!R^m \times I\!R^n; A^T y + s = c, s \geq 0\}$$

é chamado conjunto viável para o problema dual e um par $(y, s) \in \mathcal{F}(D)$ é denominado ponto viável para o problema dual. O conjunto

$$\mathcal{F}^0(D) = \{(y, s) \in I\!R^m \times I\!R^n; A^T y + s = c, s > 0\}$$

é chamado conjunto de pontos interiores viáveis duais e um par neste conjunto é denominado ponto interior viável dual. O conjunto

$$D^* = \{(y^*, s^*) \in \mathcal{F}(D); b^T y^* \geq b^T y, \text{ para todo } (y, s) \in \mathcal{F}(D)\}$$

é chamado conjunto de soluções ótimas para o problema dual e um par $(y^*, s^*) \in D^*$ é denominado solução ótima para o problema dual.

As equações que definem as condições de otimalidade associadas aos problemas (P) e (D) são dadas por:

$$
\begin{gathered}
Ax = b \\
A^T y + s = c \\
x^T s = 0 \\
x, s \geq 0.
\end{gathered}
$$

Um ponto $(x^*; y^*; s^*)$ resolve as equações das condições de otimalidade se e somente se x^* resolve o problema (P) e $(y^*; s^*)$ resolve o problema (D). A partir das equações que definem as condições de otimalidade para o Problema de Programação Linear, obtemos as equações que definem a trajetória central:

$$
\begin{gathered}
Ax = b, \quad x > 0 \\
A^T y + s = c, \quad s > 0 \\
x^T s = \mu > 0.
\end{gathered}
$$

A diferença para as equações que definem as condições de otimalidade, está no parâmetro μ e nos pontos, que pertencem ao interior do conjunto viável. Note que fazendo $\mu = 0$ obtemos um ponto x^* que resolve o problema (P) e um par $(y^*; s^*)$ que resolve o problema (D). Então é bem conhecido que a Trajetória Central converge para o centro analítico do conjunto de soluções ótimas do PPL.

Teorema 3.1. *A Trajetória Central* $\{x(\mu); \mu > 0\}$ *converge para o centro analítico da face ótima, isto é, para a solução do problema*

$$
\begin{aligned}
&\textit{minimizar} - \textstyle\sum_{i \in B} \log x_i \\
&\textit{sujeito a: } x \in P^*
\end{aligned}
$$

onde $B = \max\{B(x); x \in P^*\}$, *e* $B(x) = \{i; x_i > 0\}$.

Nas referências [1] e [2] é feita uma prova mostrando que a trajetória é analítica no seu ponto limite, isto é, quando $\mu = 0$. Esta demonstração é trabalhosa e exige uma boa bagagem matemática para o seu bom entendimento. Nosso trabalho foi obter uma prova simplificada deste resultado, ou seja, do seguinte teorema:

Teorema 3.2. *A função*

$$\alpha : \mu \in [0, 1] \to \alpha(\mu) = (x(\mu), y(\mu), s(\mu))$$

é uma curva analítica.

4 Conclusão

Para obtenção dos resultados foi feito um estudo completo sobre a Trajetória Central obtendo um bom embasamento teórico na área. Por outro lado, como a simplificação da prova das referências [1] e [2] conta com um número menor de requisitos matemáticos, conseguimos torná-la mais acessível inclusive para alunos dos primeiros anos de graduação.

PALAVRAS-CHAVE: Programação Linear, Trajetória Central e Métodos de Pontos Interiores.

5 Referências

[1] HALICKÁ, M. *Two simple Proofs for analyticity of the central path in linear programming*. Operations Research Letters 28 (2001) 9-19.

[2] HALICKÁ, M. *Analytical properties of the central path at boundary point in linear programming*. Math. Programming 84 (1999) 335-355.