COSTA, A.S. BAKUZIS, A.F. Equações de Lorenz na Ferrohidrodinâmica. In:CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 3., 2006, Goiânia. **Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica** [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p.

EQUAÇÕES DE LORENZ NA FERROHIDRODINÂMICA

COSTA, Anderson Silva [1]; **BAKUZIS**, Andris Figueirôa [2].

Palavras-chave: Modelo de Lorenz, Fluidos Magnéticos, Ferrohidrodinâmica.

1. INTRODUÇÃO (justificativa e objetivos)

As aplicações dos fluidos magnéticos são, em sua grande maioria, provenientes de suas propriedades ferrohidrodinâmicas. Interessantes efeitos nesse sistema decorrem de sua eficiente resposta a efeitos de campo magnético, por exemplo, na possibilidade de transferência de calor via mecanismo de convecção mesmo em baixas diferenças de temperatura, como consequência de serem sistemas mistos (líquido + nanopartículas) e da ação de campo magnético. Matematicamente isso implica que, além da equação de condução de calor é necessário incluir a densidade de força magnética (Força de Kelvin) na equação de Navier-Stokes[1]. Historicamente o problema de convecção em fluidos simples foi tratado de forma simplificada por Lorenz sendo considerado um modelo clássico [2]. Neste trabalho obtivemos, pela primeira vez na literatura, as equações de Lorenz na ferrohidrodinâmica.

2. METODOLOGIA

Repetimos o cálculo teórico realizado por Lorenz para um fluido simples. Posteriormente utilizamos o modelo para um fluido magnético incluindo a densidade de força magnética de Kelvin e a partir dai encontramos as esquações de Lorenz na ferrohidrodinâmica.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo de Lorenz na Ferrohidrodinâmica
A equação de Navier-Stokes é

$$\rho\Big(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \overrightarrow{v}\cdot\nabla v_z\Big) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 v_z + f_m \tag{1}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \overrightarrow{v}\cdot\nabla v_x\Big) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 v_x, \tag{2}$$

onde a densidade de força magnética é dada por

$$f_m = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}_m \tag{3}$$

sendo $\overleftrightarrow{T}_m$ tensor eletromagnético de Cowley e Rosensweig[4]

$$\overleftrightarrow{T}_m = -\Big\{\int_0^H \mu_0 \frac{\partial(\upsilon M)}{\partial\upsilon}\Big|_{H,T} dH + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\Big\}\overleftrightarrow{I} + \vec{H}\vec{B} \tag{4}$$

A equação de condução de calor é descrita por

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{v}\cdot\nabla T = D_T\nabla^2 T \tag{5}$$

É interessante escrever a função temperatura em termos de uma nova variável τ com δT sendo a diferença de temperatura.

$$T(x,z,t) - T_w = \tau(x,z,t) - \Big(\frac{z}{h}\Big)\delta T \tag{6}$$

[1]Voluntário de iniciação científica. Instituto de Física. anderson.hardrock@hotmail.com
[2]Orientador, Instituto de Física, UFG, bakuzis@if.ufg.br

A densidade do fluido é apresentada por, onde $\rho_0 = \rho(T_w)$

$$\rho(T) = \rho_0 - \alpha\rho_0\Big\{\tau - \Big(\frac{z}{h}\Big)\delta T\Big\} \tag{7}$$

Expansão da magnetização $M(H,T)$ em série de Taylor ao desprezar-se os termos de ordem superior

$$M(H,T) = M_0 - \kappa\Big\{\tau - \Big(\frac{z}{h}\Big)\delta T\Big\} + \chi_l \delta H\Big(\frac{z}{h}\Big) \tag{8}$$

O coeficiente piromagnético

$$\kappa = -\Big(\frac{\partial M}{\partial T}\Big)_H = -\frac{1}{1+n\chi_l}\Big(\frac{\partial M_0}{\partial T}\Big)_H = -\frac{\kappa_0}{1+n\chi_l}$$

A densidade de força magnética

$$f_m = \nabla P'_m - 4\pi\frac{\mu_0 M_0 \kappa\delta T}{\lambda h} + 4\pi\frac{\mu_0\kappa^2\delta T}{\lambda h}\Big\{\tau - \Big(\frac{z}{h}\Big)\delta T\Big\} - 4\pi\frac{\mu_0\kappa\delta T\chi_l\delta H z}{\lambda h^2} \tag{9}$$

Após manipulações matemáticas obtemos a pressão efetiva

$$p'_m = p + \Big(\rho_0 g + 4\pi\frac{\mu_0\kappa^2\delta T}{\rho_0\lambda h}\Big)z + \frac{1}{2}\Big(\alpha\rho_0 g\delta T + 4\pi\frac{\mu_0\kappa^2\delta T^2}{\lambda h} + 4\pi\frac{\mu_0\kappa\delta T\delta H\chi_l}{\lambda h}\Big)\frac{z^2}{h} \tag{10}$$

A função fluxo (Stream Function) $\Psi(x,z,t)$ é responsável por carregar as informações sobre o elemento de fluido que está relacionada com sua velocidade por meio das seguintes equações

$$v_x = -\frac{\partial\Psi(x,z,t)}{\partial z} \tag{11}$$

$$v_z = \frac{\partial\Psi(x,z,t)}{\partial x} \tag{12}$$

Ao substituirmos v_x e v_z definidos acima nas equações de Navier-Stokes, depois de termos escrito as equações em termos de variáveis adimensionais, realizando uma operação de derivadas trocadas, subtraimos uma equação da outra e obtemos a equação

$$\frac{1}{\sigma}\Big\{\frac{\partial(\nabla^2\Psi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\Big)\Big\} = R\frac{\partial\tau}{\partial x} + \nabla^4\Psi \tag{13}$$

As condições de contorno no nosso problema são $\tau = 0 \Rightarrow z = 0$ e $z = 1$, $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ em $z = 0$ e $z = 1$. Utilizando a suposição de Lorenz

$$\Psi(x,z,t) = \Psi(t) sen\pi z sen a x \tag{14}$$

$$\tau(x,z,t) = T_1(t) sen\pi z cos a x - T_2(t) sen(2\pi z) \tag{15}$$

A forma final das equações da Lorenz na Ferrohidrodinâmica são dadas pelas equações e fazendo as substituições $X(t) = \frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}}\Psi(t)$, $Y(t) = \frac{r\pi}{\sqrt{2}}T_1(t)$ e $Z(t) = \pi r T_2(t)$ obtemos

$$\dot{X} = \sigma(Y - X) \tag{16}$$

$$\dot{Y} = r^* X - Y - XZ \tag{17}$$

$$\dot{Z} = XY - b^* Z \tag{18}$$

Onde $r^* = \frac{a^2}{(a^2+\pi^2)^3}(R+R_m)$,$R = \frac{\alpha g h^3 \delta T}{\nu D_T}$, $R_m = 4\pi \frac{\mu_0 \kappa^2 \delta T^2 h^2}{\rho_0 \lambda \nu D_T}$, $b = \frac{4\pi^2}{a^2+\pi^2}$ e $\sigma = \frac{\nu}{D_T}$. Portanto, uma primeira aproximação como solução é desprezar os termos de ordem superiores e combinando as equações (16) e (17) obtemos $\ddot{X} + (1+\sigma)\dot{X} + \sigma(1-r)X = 0$. Onde podemos concluir que para $r^* > 1$ temos soluções instáveis, ou seja

$$\frac{a^2}{(a^2+\pi^2)^3}(R+R_m) > 1 \Rightarrow R + R_m > \frac{(a^2+\pi^2)^3}{a^2} = R_c \Rightarrow R + R_m > R_c \tag{19}$$

Note que para $R + R_m > R_c$ obtemos *convecção.*

CONCLUSÃO

O objetivo desse projeto foi avaliar as condições em que um fluido magnético sofre um processo convectivo. Note que ao colocarmos no lugar de um fluido simples um fluido magnético encontramos alguns parâmetros e condições que permita o controle do processo de convecção. Por exemplo, analisando a razão entre os números de *Rayleigh magnético* e *Rayleigh gravitacional*, obtemos $\frac{R_m}{R} \propto \frac{\delta T}{h}$, ou seja, espera-se uma contribuição magnética mais significativa quanto menor for h. Diferentemente do *Rayleigh gravitacional*, $R_m \propto \delta T^2$. Portanto, a convecção pode ser obtida mesmo com $\delta T < 0$. Cabe aqui ainda observar que os parâmetros do fluido magnético podem ser alterados por meio de um controle da fração volumétrica de partículas.

Finalmente é importante ressaltar que uma pesquisa no portal *www.isiknowledge.com* mostrou que não existe nenhum trabalho na literatura que obtém essas equações. Portanto, concluimos que esta é a primeira demostração das equações de Lorenz na ferrohidrodinâmica.

Referências

[1] W.Luo , T. Du, J. Huang, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4134 (1999).

[2] E. N. Lorenz, J. Atmos. *Sci.* **20**, 130 (1963).

[3] M.D. Cowley , R.E. Rosensweig. *J. Fluid Mech* **30(4)**, 671 (1967).

[4] R. E. Rosensweig, "Ferrohydrodynamics", *Dover Publ.*, New York (1997).