SANTOS, J. P.; SOUZA, M. A. Em busca das geodésicas em superfícies de R^3 com uma métrica de Randers. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 2., 2006, Goiânia. **Anais eletrônicos do XIII Seminário de Iniciação Cientifica** [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p**.**

Em busca das Geodésicas de superfícies de R^3 com uma Métrica de Randers

SANTOS, João Paulo dos[1] ; **SOUZA**, Marcelo Almeida de[2]

Palavras Chaves: Geometria, Geodésicas, Métrica, Randers

1. **INTRODUÇÃO** (Justificativa e objetivos)

As *Geodésicas* são as curvas mais estudadas dentro da geometria, elas desempenham um importante papel, tanto para uso como ferramentas para se desenvolver estudos de certas superfícies (as folheadas por geodésicas, por exemplo), quanto para o seu estudo em si. As *Geodésicas* surgem naturalmente na natureza, elas são trajetórias descritas por partículas que minimizam energia, localmente (sob certas condições sobre a superfície) elas minimizam comprimento de arco dentre as curvas que unem dois de seus pontos, logo minimizam distâncias. Na geometria euclidiana as geodésicas de um plano são suas retas, o que é natural de se esperar (a menor distância entre dois pontos de um plano, completo “sem buracos”, é uma reta), já para uma superfície de rotação temos que seus meridianos, e os paralelos que têm vetor normal paralelo ao vetor normal da superfície são exemplos de tais curvas, estes paralelos são círculos. Em particular as geodésicas de uma esfera são os círculos máximos que fazem o papel de retas da esfera (o que incluem os meridianos, e o paralelo que é dado pelo equador).

Neste projeto, estudamos as *Geodésicas* de certas superfícies de R^3 com uma métrica de Randers $F=\alpha+\beta$, onde α é uma métrica euclidiana, e β é uma 1-forma com norma b, $0 \le b < 1$ controlada. Iniciamos com o caso em que b=0, ou seja, temos que a métrica de Randers é a euclidiana. E depois consideramos o caso em que a métrica de Finsler é uma métrica de Randers, que pode ser vista com uma simples perturbação da métrica euclidiana.

Um espaço de Finsler é uma variedade M com uma estrutura dada por uma função métrica $F(x,y)$, $x \in M$, $y \in T_xM$ – o espaço tangente a M em x, positiva homogênea de grau um em y, com a forma $[\frac{1}{2}F^2]_{y^iy^j}$ positiva definida. A importância de se estudar a geometria de Finsler é que nem todos os espaços físicos são Riemannianos, e temos que métodos desenvolvidos na Geometria de Finsler podem ser utilizados para estudar equações diferenciais de segunda ordem surgindo em áreas tais como Biologia, Física e Ecologia. Em especial métricas de Randers aparecem na Óptica Eletrônica.

Enfocamos o estudo de *Geodésicas* em superfícies de (R^3,α), e uma introdução às geodésicas de superfícies em $(R^3,\alpha+\beta)$, i.e., superfícies dentro de um espaço de Finsler com uma métrica de Randers.

O objetivo deste trabalho é apresentar ao aluno uma introdução ao estudo de *Geodésicas* em espaços de Finsler munidos com uma métrica de Randers $(R^3,\alpha+\beta)$. Trabalharemos com parametrizações no espaço vetorial tridimensional (funções vetoriais de uma ou duas variáveis). Impondo que uma curva minimize energia sua parametrização deve satisfazer uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem, temos daí que ao procurar exemplos de geodésicas de uma superfície devemos dar condições iniciais, a saber o ponto por onde a curva passa e sua direção tangente naquele ponto.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada no projeto foi da seguinte forma:

- Investigação científica com o levantamento da bibliografia utilizada;
- Estudo individual e encontros semanais com o professor orientador;
- Análise dos dados obtidos e divulgação em congressos científicos, através de painel/pôster, seminários.
- Uso do software Maple para obter as curvas Geodésicas, resolvendo numericamente a EDO que caracteriza tais curvas e em seguida plotando-as.

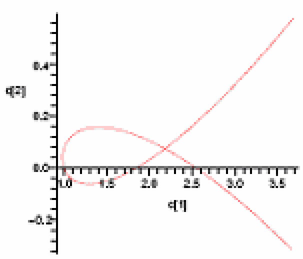
3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

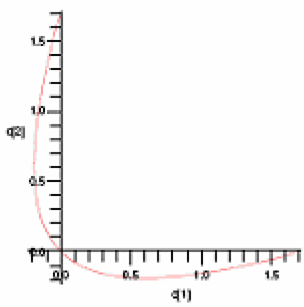
Fizemos uma apresentação de pôster na II Jornada de Iniciação Científica realizado em 2005, no IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Em julho de 2006, participamos da XIV Escola de Geometria Diferencial onde apresentamos um pôster com os últimos resultados obitidos.

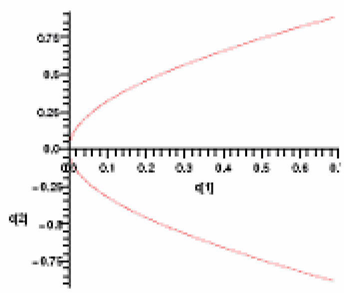
Dando continuidade ao projeto do ano passado, demos ênfase ao estudo das geodésicas no Espaço de Finsler. Estudamos em detalhes **[Sh]** onde obtivemos uma outra abordagem sobre geodésicas no Espaço de Finsler o que nos possibilitou adiantar nossos estudos em relação a encontrá-las e, de posse desses resultados, pretendemos extender nosso estudo olhando casos de métricas mais gerais. Vimos que se a 1-forma β tiver a propriedade de ser paralela em relação a função α as geodésicas na métrica $\alpha+\beta$, como conjunto de pontos, são as mesmas na métrica α. Avançando nosso estudo, utilizamos o software matemático Maple e obtivemos exemplos de geodésicas onde β não é paralela em relação a α.

Apresentamos a seguir algumas geodésicas, para o exemplo:

$$F(c_1, c_2, y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + \frac{c_1 y_2 - c_2 y_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 1}}.$$







Nosso próximo passo será investigar as superfícies estudadas em **[TS], [TSS].**

[AIM] Antonelli, P.L., Ingarden, R.S. and Matsumoto, M., *The Theory of Spray and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, D. Reidel and Kluwer Academic Press, 1993.

[BCS] Bao, D., Chern, S.S. and Shen, Z., An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 200, New York, NY, Springer, xx, 2000.

[dC1] do Carmo, M.P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall.

[Fi] Figueiredo, D.G. de, Equações Diferenciais Aplicadas, 1º CBM, IMPA, 1979.

[G] Guidorizzi, Um curso de Cálculo, Vol 1-4, 1998.

[L] Lima, E.L. Álgebra Linear, SBM, 2000.

[So] Souza, M.A., Superfícies Mínimas em Espaços de Finsler com uma Métrica de Randers, Thesis, Universidade de Brasília, 2001.

[Sot] Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[Sh] Shen, Z. *Lectures on Finsler Geometry*, Departament of Mathematics Sciences, Indiana University – Purdue University Indianapolis, 2001.

[Te] Tenenblat, K. *Introdução à Geometría Diferencial*, Editora UnB, 1988.

[TS] Tenenblat, K. and Souza, M.A., Minimal Surfaces of Rotation in Finsler Space with a Randers Metric, Math. Ann., 325, 625-642 (2003).

[TSS] Tenenblat, K., Spruck, J. and Souza, M.A., A Bernstein Type theorem on a Randers space, Math. Ann., {\bf 329}, 291-305 (2004)

FONTE DE FINANCIAMENTO – CNPq/PIBIC

[1] Bolsista de Iniciação Científica – Instituto de Matemática e Estatística – UFG, joaopaulo_mat@yahoo.com.br
[2] Orientador – Instituto de Matemática e Estatística – UFG, msouza@mat.ufg.br