

1 INTRODUÇÃO

Um sistema de equações diferenciais polinomial no plano, ou simplesmente sistema polinomial, é dado na forma $(\dot{x}, \dot{y}) = (P(x, y), Q(x, y))$, onde P, Q são polinômios nas variáveis x e y com coeficientes reais. Neste trabalho, $m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$ será denotado o grau do sistema polinomial.

Os campos vetoriais quadráticos têm sido muito estudados e temos aproximadamente cerca de 1000 artigos publicados sobre o assunto, mas ainda é um problema aberto saber quais são integráveis.

O nosso objetivo principal é classificar os planos de fase de campos vetoriais quadráticos reversíveis do tipo $(2, 0)$, ou seja, campos polinomiais no plano de grau 2 e que tem uma anti-simetria, ou melhor, campos X que satisfazem:

$$D\varphi X = -X\varphi$$

onde φ é uma involução, i.e., $\varphi \circ \varphi = Id$, tal que a dimensão dos seus pontos fixos é zero. Em (Medrado, Llibre[3]), foram classificados todos os retratos de fase do tipo $(2, 1)$ e queremos fazer o mesmo para os campos vetoriais quadráticos do tipo $(2, 0)$, ou seja, campos polinomiais no plano de grau 2 e que tem uma anti-simetria, ou melhor, campos

$$X : \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = a(1 - x^2) + bxy + y^2 \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Para isto se faz necessário estudarmos os campos na bola de Poincaré, ou seja por uma mudança de coordenadas estudamos o campo na esfera \mathbb{S}^2 , tendo o equador como o infinito do plano. Estudamos os elementos do campo tanto localmente como globalmente. Para termos informações a respeito das conexões de selas, do comportamento global do campo, faz-se necessário termos as integrais primeiras.

2 METODOLOGIA

Revisão e estudo da bibliografia pertinente, além do auxílio do software matemático Maple através de uma rotina implementada neste pelo Professor João Carlos da Rocha Medrado. Utilização também do software Mathematica para buscar soluções de EDO.

¹Bolsista PIBIC – CNPq, Instituto de Matemática e Estatística – UFG, ubirajara_castro@yahoo.com

²Orientador PIBIC, Instituto de Matemática e Estatística – UFG, medrado@mat.ufg.br

Palavras-chave: Integrabilidade, campos vetoriais, integrais primeiras.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estamos estudando o campo vetorial $X_{(a;b)}$ para todos os valores de $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ e temos alguns resultados prontos, mas ainda nos falta mostrar diversos outros. Esperamos que consigamos terminar tudo nestes próximos meses afim de formatá-los na forma de um artigo. A seguir apresentamos o que temos atualmente. O resultado principal deste subprojeto de pesquisa é o seguinte Teorema:

Teorema 1. *O retrato de fase do campo de vetores polinomial planar quadrático reversível do tipo*

$$X(x, y) = (1 - x^2, a(1 - x^2) + bxy + y^2) \quad (1)$$

é topologicamente equivalente a uma das 12 configurações listadas nas figuras seguintes: (vide em anexo figuras 2 à 13)

Para a prova do Teorema acima, faremos uso dos seguintes Lemas:

Lema 2. *Os pontos $A_1 = (1, 0)$ com autovalores $c_{11} = -2, c_{12} = b$, $A_2 = (-1, 0)$ com autovalores $c_{21} = 2, c_{22} = -b$, $A_3 = (1, -b)$ com autovalores $c_{31} = -2, c_{32} = -b$ e $A_4 = (-1, b)$ com autovalores $c_{41} = 2, c_{42} = b$, são pontos singulares de (1) em \mathbb{R}^2 .*

Lema 3. *Compactificando o campo (1), na carta U_1 , obtemos o seguinte sistema:*

$$X_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = az_2^2 - abz_1 + z_2 - z_1z_2^2 + z_1 \\ \dot{z}_2 = -z_2(z_2^2 - 1) \end{cases}$$

Os pontos $I_1 = (1/2(-b - 1 + \sqrt{(b+1)^2 + 4a}), 0)$ com autovalores $k_{11} = 1$ e $k_{12} = \sqrt{(b+1)^2 + 4a}$ e $I_2 = (1/2(-b - 1 - \sqrt{(b+1)^2 + 4a}), 0)$ com autovalores $k_{21} = 1$ e $k_{22} = -\sqrt{(b+1)^2 + 4a}$ são pontos singulares no infinito na carta U_1 .

Para a carta U_2 , temos o seguinte sistema:

$$X_2 : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2^2 - z_1^2 - az_1z_2^2 + az_1^3 - bz_1 - z_1 \\ \dot{z}_2 = z_2(-az_2^2 + az_1^2 - bz_1 - 1) \end{cases}$$

$O = (0, 0)$ com autovalor $\lambda_{11} = -1$, é um ponto crítico para X_2 .

Estudando os coeficientes do campo obtemos o seguinte diagrama (vide figura 1 em anexo) de bifurcação para o plano cartesiano (a, b) :

- (1) Na região 1 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 < 0, a < 0\}$;
- (2) Na região 2 definida por $\{(a, b) | b = 0, a < 0\}$;
- (3) Na região 3 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 < 0, -1 < b < 0, a < 0\}$;
- (4) Na região 4 definida por $\{(a, b) | b = -1, a < 0\}$;
- (5) Na região 5 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 < 0, b < -1, a < 0\}$;
- (6) Na região 6 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 = 0, b < -1, a < 0\}$;

- (7) Na região 7 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 > 0, b < -1\}$;
- (8) Na região 8 definida por $\{(a, b) | b = -1, a > 0\}$;
- (9) Na região 9 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 > 0, -1 < b < 0, a < 0\}$;
- (10) Na região 10 definida por $\{(a, b) | b = 0, a > 0\}$;
- (11) Na região 11 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 > 0, b > 0\}$;
- (12) Na região 12 definida por $\{(a, b) | a + (b + 1)^2/4 = 0, b > 0, a < 0\}$;

4 Comentários finais

Estamos estudando o campo vetorial $X_{(a,b)}$ para todos os valores de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e temos alguns resultados prontos, mas ainda nos falta mostrar diversos outros. Esperamos que consigamos terminar tudo nestes próximos meses afimm de formatá-los na forma de um artigo.

Referências

- [1] D. G. Figueiredo, *Equações diferenciais aplicadas*, IMPA, (1997)
- [2] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I.Gordon and A.L. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic systems*, Wiley, New York, 1973.
- [3] E.A.V. Gonzales, *Generic properties of polynomial vector fields at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 201–222.
- [4] L. Markus, *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 127–148.
- [5] D. Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 73–81.
- [6] J. C. R. Medrado and J. Llibre, *Darboux integrability and reversible quadratic vector fields*, to appear in Rocky Mountain Journal.
- [7] J. Llibre, *Integrability of polynomial differential systems, Ordinary differential equations*, Vol. 1, Elsevier B. V., Barcelona (2004).
- [8] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems, Texts in applied mathematics*, Vol. 7, Springer–Verlag, New York. (1991)

5 Anexos

Figura 1: Diagrama de bifurcação de $X_{(a,b)}$.

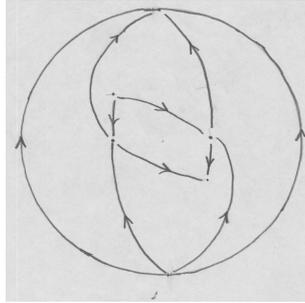


Figura 2: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 1.

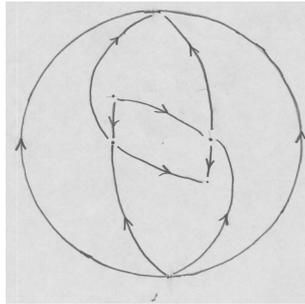


Figura 3: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 2.

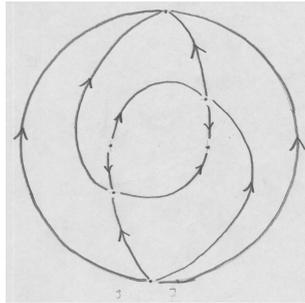


Figura 4: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 3.

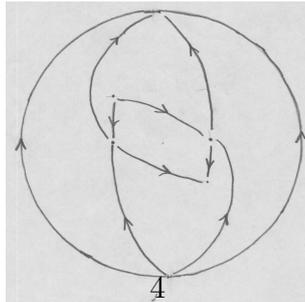


Figura 5: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 4.

Figura 6: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 5.

Figura 7: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 6.

Figura 8: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 7.

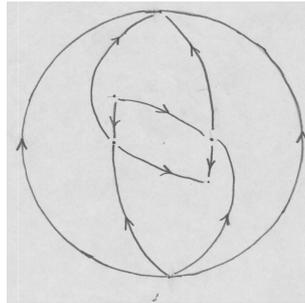


Figura 9: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 8.

Figura 10: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 9.

Figura 11: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 10.

Figura 12: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 11.

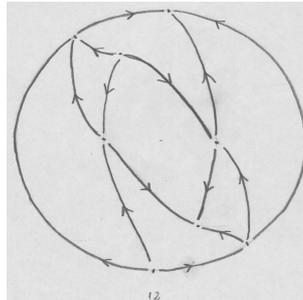


Figura 13: Retrato de fase de $X_{(a,b)}$ para região 12.