Problemas de fundamentação da teoria dos conjuntos axiomatizada.

Correia, Hiury Duarte[1]; **Porto**, André da Silva[2].

Palavras-chave: Teoria dos conjuntos, Frege, axiomatização ZF

1. Introdução(introdução e objetivos)

Richard Dedekind e Giussepe Peano desenvolveram um trabalho demonstrando que toda a teoria dos números naturais podia ser deduzida de três noções primitivas, a de “número”, “zero” e “sucessor”; e a partir destas desenvolver cinco proposições primitivas. Essas noções se tornaram uma espécie de garantia de toda a matemática pura tradicional. Entretanto, se elas pudessem ser justificadas por meio de outras, toda a aritmética também o seria.

Tendo como certo que as noções fundamentais expressas pelos axiomas de Dedekind/Peano não eram elementares, Frege desenvolve a sua conceitografia, onde as definições das noções fundamentais são dadas. Todas as definições são desenvolvidas através do uso da lógica formal, desenvolvida pelo próprio Frege, e pela teoria dos conjuntos de Cantor. Após a realização fregeana a lógica e a teoria dos conjuntos passaram a ser o alicerce de toda a aritmética e perguntas acerca dos fundamentos da aritmética passaram a equivaler a perguntas sobre conjuntos.

Em 1902, Bertrand Russell envia uma carta a Frege demonstrando que a partir de um de seus axiomas poder-se-ia desenvolver uma antinomia. Essa dificuldade tornou-se amplamente conhecida como paradoxo de Russell. No mesmo ano Frege publica o segundo volume dos seus *Grundgesetze* com um *Postscriptum* que começa:

> *Dificilmente poderá suceder a um cientista uma coisa mais infeliz do que ter um dos fundamentos do seu edifício abalado depois de ter terminado a obra.*
> *Foi nesta posição que me vi colocado por uma carta de Bertrand Russell quando a impressão deste volume estava quase completa. Refere-se ao meu Axioma(V). Nunca ocultei de mim próprio a sua falta de evidência, que os outros axiomas de resto não tem, quando de uma lei da lógica o que se deve exigir é evidência [..] Teria dispensado este axioma com agrado se eu conhecesse uma maneira qualquer de o substituir. E mesmo agora não vejo como é que se pode estabelecer cientificamente a aritmética, como é que os números podem ser apreendidos como objetos lógicos a não ser que sejamos permitidos – pelo menos condicionalmente – a passar de um conceito para a sua extensão.* (FREGE apud KNEALE, 1962 p. 659)

O problema apresentado por Russell envolve o quinto axioma de frege, conhecido no sistema ZF por “axioma da separação” e que é a ferramenta fundamental à criação de conjuntos. O paradoxo de Russell demonstrou que a proposta de formalização da aritmética através da teoria dos conjuntos era inconsistente. O nosso objetivo, tendo em vista tal problema, é compreender as principais diferenças entre a proposta fregeana inicial e o sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (ZF), que atualmente é utilizado pela maioria dos matemáticos.

2. Metodologia

A nossa metodologia seguiu o modelo proposto no subprojeto, onde encontros semanais foram realizados a fim de levantarmos temas a serem discutidos e fichados. Produzimos resenhas críticas dos assuntos que centraram-se, principalmente, em manuais de teoria dos conjuntos axiomática e ingênua.

Iniciamos o trabalho de tradução do livro , mencionado em nossa bibliografia, *elements of set theory,* de Herbert Enderton, por considerá-lo uma obra de grande relevância à pesquisa em teoria dos conjuntos e não haver tradução em língua portuguesa, visto que o texto original se encontra em inglês.

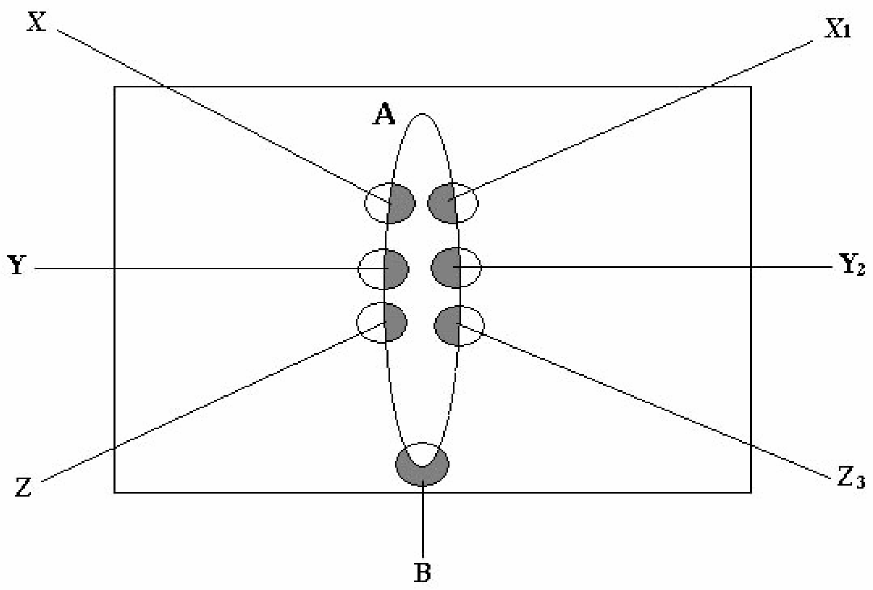
Por nossa pesquisa não ser voltada à observação empírica, não dispomos de laboratórios ou equipamentos. Basicamente o que utilizamos são os livros disponíveis em nossa biblioteca e os computadores da universidade.

3. Resultados e Discussão

O impacto fundamental do paradoxo de Russell foi no método de construção de conjuntos através da abstração de propriedades que era concebido como $\forall x \exists y (x \in y \leftrightarrow P(x))$. Uma de suas mais importantes conseqüências foi a extinção do conjunto universo(**U**). Para isso, fez-se necessária uma reconsideração do método de abstração de propriedades que agora já não podia mais ser utilizado irrestritamente.

Uma das medidas tomadas no sistema ZF foi evitar a criação do conjunto universo(**U)** através da pressuposição de um conjunto qualquer A, o qual todos os conjuntos seriam subconjuntos. Com tal mudança, o método de abstração de propriedades passou a ser concebido como $\forall x \exists y (x \in y \leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$, passando a ser conhecido como “axioma da especificação”. Em decorrência do que foi mencionado acima, a axiomatização de ZF não forma uma álgebra booleana.

Vejamos uma ilustração deste axioma em que o conjunto de Russell, o qual gerara o paradoxo, é evitado. Este conjunto B é definido pelos X´s não auto-pertencentes. Assim, $B = \{x \in A : x \notin x\}$, suponhamos que $B \in A$, então $B \in B$ ou $B \notin B$. Se $B \in B$, então $B \in A$ e $B \notin B$(pois esta é a propriedade definidora.) por outro lado, se $B \notin B$, então $B \in A$ e $B \in B$. Em ambos os casos temos uma contradição. Como a existência de B é garantida pelo axioma da especificação, temos que B não pode pertencer a A. Demonstramos acima, que dado um conjunto qualquer A, sempre existe um conjunto que não pertence a A, de modo que não existe a coleção de todos os conjuntos **U**. Com a axiomatização de Zermelo-Fraenkel é dada uma restrição para o método de abstração de propriedades o que faz com que o paradoxo de Russell seja evitado. A fig. 1.2 esboça o modelo de Zermelo-Fraenkel, onde os conjuntos X, Y, Z, X1,Y2 e Z3 são subconjuntos de A, respeitando $\forall x \exists y (x \in y \leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$. Já o conjunto de Russell (B) seria do tipo $\forall x \exists y (x \in y \leftrightarrow x \notin A \wedge P(x))$ o que não satisfaz o axioma da especificação, não sendo assim um subconjunto de A. Desta maneira, B não é um conjunto no sistema ZF, dado que este se ocupa unicamente com os subconjuntos de A.



Investigamos a parte finita da teoria dos conjuntos e é ai que centraram nossas principais conclusões.

4. Conclusão

A noção de conjunto, extensão é utilizada desde tempos remotos, mas foi realmente investigada somente no final do século XIX com os trabalhos de Cantor, que sistematizou a teoria e provou a existência de conjuntos não enumeráveis, e Frege que foi responsável pelo projeto logicista. Podemos assim notar dois tipos de desenvolvimento da teoria, um matemático e outro filosófico.

Nosso escopo nesta pesquisa foi avaliar as conseqüências de tomar a teoria dos conjuntos como uma teoria geral das entidades conforme propôs Frege.

Podemos entender a teoria dos conjuntos como uma teoria geral das entidades, na medida em que ela pressupõe a existência de um domínio único, os conjuntos. A noção fundamental subjacente à teoria é a de que qualquer objeto, por meio de uma propriedade, pode ser transformado em um conjunto ou, de outro modo, qualquer objeto faz parte da extensão de uma classe. O que seria uma espécie de linguagem universal. Frege pretendia, através da lógica e da teoria dos conjuntos, desenvolver uma linguagem rígida capaz de avaliar provas matemáticas. Após 1902, com o paradoxo de Russell, uma das alternativas foi a axiomatização que, além de perder o caráter intuitivo, os conjuntos passam a ser concebidos como entidades produzidas pelos axiomas construtivos e não mais como entidades de um determinado domínio anterior como queria Frege. Vimos que a axiomatização de Zermelo-Fraenkel-Skolem foi uma das possíveis maneiras de contornar o problema, mas que mesmo após ela não temos uma solução satisfatória para paradoxos semânticos como por exemplo os de Richard e Berry.

5. Referências Bibliográficas

KNEALE, William e KNEALE, Martha. *O Desenvolvimento de Lógica*. Trad. M. S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

---

[1] Bolsista de iniciação científica. Faculdade de Ciências Humanas e Filosofia. correiahd@gmail.com

[2] Orientador/ Faculdade de Ciências Humanas e Filosofia/UFG andré.s.porto@uol.com.br