Reis, Alberto Santos dos e Castro, Helvécio Pereira de

Curvas Conexas

Introdução

O nosso principal objeto de estudo são as curvas conexas. Para realizarmos esse estudo, é necessário um certo conhecimento de Cálculo Diferencial e de Geometria Analítica. Essas Disciplinas forma estudadas pelo aluno durante o presente projeto, além de algumas ferramentas da Geometria Diferencial que o aluno também adquiriu. Sendo assim, concluímos que o aluno já dispõe de certa capacitação técnica que o ajudará a ingressar no campo de pesquisa da Geometria Diferencial.

Resultados e discussão

Curvas Planas

Teorema Fundamental das curvas planas.

a) Dada uma função diferenciável k(s), s $\in I \subset R$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s, cuja curvatura é k(s).

b) A curva $\alpha(s)$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha`(s_0) = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de R^2.

c) Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, i.é., existe uma rotação L e uma translação T em R^2, tal que $\alpha = (L \circ T)(\beta(s))$.

Índice de Rotação de Curvas Fechadas Simples

O índice de rotação R_α de uma curva regular fechada α é, por definição, o número de rotação da curva α'. Portanto o índice de rotação fornece uma informação sobre o comportamento global de α', que, a principio, não tem por que ser parecido com o comportamento global de α. Por outro lado, α determina, a menos de uma translação, a curva original α e reciprocamente.

Logo não seria de todo surpreendente que o índice de rotação R_α nos desse alguma informação sobre a geometria de α.

Para curvas fechadas, regulares e simples, tem-se o seguinte resultado:

Teorema *(Teorema da Rotação das Tangentes) Seja α [a,b] $\rightarrow R^2$ uma curva regular, fechada, simples e de classe C^1. Então*

$R_\alpha = \pm 1$.

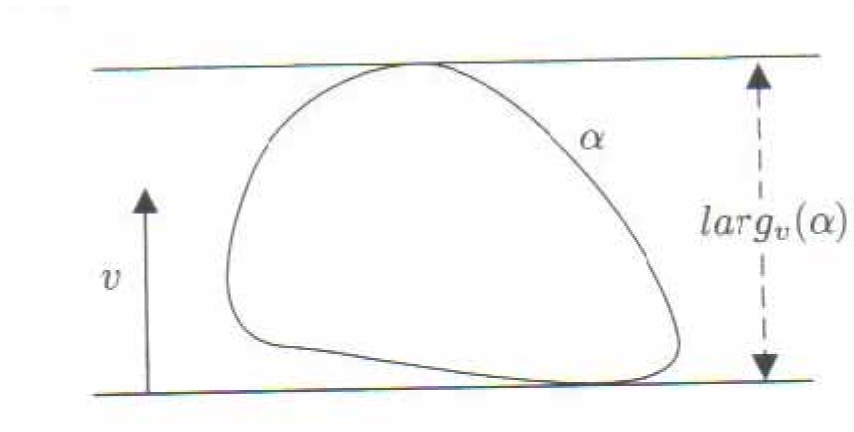
Alem disso, se α é de classe C^2*, então sua curvatura total CT (*α) satisfaz.

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^t k(\varepsilon) \| \alpha'(\varepsilon) \| \, d\varepsilon = \pm 1.$$

Curvas de Largura Constante

A noção de largura de uma curva no plano em relação a uma direção de R^2 mostra-se algumas propriedades das curvas de largura constante.

Fixe um vetor *v* não-nulo em R^2. Seja α: [a,b] $\rightarrow R^2$ uma curva regular e fechada. A *largura* de α em relação à direção *v*, $larg_v(\alpha)$, *é* dada pela menor distância entre duas retas paralelas r_1 e r_2, ortogonais a *v* e com a propriedade que o traço de α esteja contido na faixa determinada por essas duas retas.



Definição: Seja α: [a, b] $\rightarrow R^2$ uma curva continua. O diâmetro D de α é dado por: D = max $\{\| P-Q \|$; P,Q pontos sobre o traço de $\alpha\}$.

Comprimento e Área de curvas convexas

Vamos determinar expressões para medir o comprimento de uma curva estritamente convexa, bem como para a área da região limitada por essa curva. Esses resultados serão conseqüência de escrevermos a curva usando coordenadas polares tangenciais. Seja *C* o traço de uma curva regular, fechada, convexa e positivamente orientada em R^2. Seja *O* um ponto na região limitada por *C*, e escolha o sistema de coordenadas R^2 de modo que a origem seja o ponto *O*. seja P = (x, y) um ponto sobre *C*, e seja rp a reta tangente à curva *C* em *P*. considere θ(P) o ângulo que a reta *np,* perpendicular a *rp* e passando por *O*, faz como o semi-eixo positivo do eixo Ox. Definia g(θ) como a projeção orientada P sobre *np*. Se *N* (P) é o campo normal unitário à curva C, a projeção g é dada por:

$$g(\theta) = \langle P,- N (P.)\rangle$$

A função g é também conhecida por função suporte de *C*.

Definição o par (θ, g(θ)) é chamado de coordenadas polares tangenciais de C.

Teorema (fórmula de Cauchy) o comprimento L de uma curva fechada, simples e estritamente convexa C é dado por

$$L = \int_{0}^{2\pi} g(\theta)\, d\theta$$

Onde g é a função suporte de C.
Teorema: a área *A* da região limitada por uma curva fehada, simples e estritamente convexa C é dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} [g^2(\theta) - (g'(\theta))^2]\, d\theta$$

Onde g é a função suporte de C.

CONCLUSÃO

Ao final deste projeto, concluímos que o mesmo teve importantíssima contribuição para o aluno, principalmente em relação ao amadurecimento do mesmo quanto aos temas relativos á geometria diferencial.

Caracterizamos também propriedades geométricas de curvas fechadas e de curvas convexas, o que contribuiu para um entendimento da matéria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Araújo, P.V., Geometria Diferencial, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998.
[2] B. W. Char, First Leaves: A tutorial introduction to Maple, Springer-verlag, 1992.
[3] Alencar, H. e Santos, W., Geometria das Curvas Planas,XII Escola de Geometria Diferencial, Goiânia, 2002.
albertoufg@yahoo.com.br hpcastro@mat.ufg.br

Fonte de financiamento : cnpq/pibic