DIAS, T.G. MELO, M.M. A Transformada de Fourier e Aplicações. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 3.,2006, Goiânia. **Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica** [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p.

A TRANSFORMADA DE FOURIER E APLICAÇÕES

DIAS, Thiago Gonçalves[1]; **SANTOS**, Fabiano Fortunato Teixeira[2]; **MELO**, Maurílio Márcio[3].

Palavras-chave: Transformada de Fourier,Equação do Calor, Laplaciano,

1.INTRODUÇÃO

Problemas físicos podem ser modelados via equações diferenciais parciais; se a essas equações impusermos uma condição inicial sobre o valor da solução, teremos os chamados problemas de Cauchy. Abordaremos neste trabalho quatro problemas de Cauchy associados a problemas físicos. Levando-se em conta que resolver problemas particulares é uma tática eficiente a fim de se estudar problemas mais gerais. Nosso objetivo é definir, estudar e aplicar a transformada de Fourier, objetivando encontrar candidatos à solução dos quatro problemas de valor inicial propostos.

2.METODOLOGIA

1. Inicialmente apresentamos algumas equações diferencias parciais (EDP´s) clássicas e as definições básicas;

2. Fizemos o estudo das equações diferenciais parciais de primeira ordem. Fomos capazes de identificar uma equação de primeira ordem bem como encontrar a solução geral de algumas dessas equações. Utilizamos o software MAPLE 9.5 para:

   - Determinar as curvas características de algumas EDP's(ANEXO 1);
   - Determinar as soluções de algumas EDP's(ANEXO 2);
   - Esboçar os gráficos das soluções de alguns problemas de valor inicial(ANEXO 3);

     Obs.: Para ver os anexos favor entrar em contato pelo e-mail do orientando.

3. Foi feito o estudo de equações semi-lineares de segunda ordem, estudamos como classificar uma equação de segunda ordem e de escrevê-la na sua forma canônica;

4. Estudamos a equação de ondas. Resolvemos alguns problemas envolvendo a equação de ondas, como por exemplo o problema da corda infinita;

5. Estudamos o método da separação de variáveis, das séries de Fourier e da convolução, convergência das séries de Fourier e a sua relação com a Transformada de Fourier;

6. Estudamos a transformada de Fourier e fizemos algumas aplicações.

3.RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1-Equação de Onda

Ao procurarmos um candidato a solução do problema de Cauchy para a corda infinita, chegamos a importante contribuição de D'Alembert na resolução da equação de ondas, dada pela fórmula:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

3.2-A Transformada de Fourier

Definimos a *transformada de Fourier* no espaço das funções absolutamente integravéis, denotada por $\mathcal{L}^1$, da seguinte maneira:

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

está bem definida para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$.

O fundamental é recuperar f de sua transformada, para resolver tal problema usaremos a *fórmula de inversão*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\,.$$

DIAS, T.G. MELO, M.M. A Transformada de Fourier e Aplicações. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 3.,2006, Goiânia. **Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica** [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p.

3.3-O Espaço de Schwartz

O *espaço de Schwartz*, denotado por $\mathcal{S}$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Vimos que se $f \in \mathcal{S}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathcal{S}$ *e*

$$(f^{(n)})\hat{}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi).$$

O resultado anterior nos permite via transformada de Fourier reduzir equações diferenciáveis parciais a equações diferenciáveis ordinárias e essas últimas em equações algébricas.

3.4-A Operação de Convolução

A *convolução* de f e g é a função $f * g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \, , \; x \in \mathbb{R}.$$

Vimos que a transformada de Fourier de uma convolução, leva no produto de duas transformadas, isto é: Se $f, g \in \mathcal{S}$, então $f * g \in \mathcal{S}$ e

$$(f * g)\hat{}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

3.5-Aplicações

Fizemos uso de todo o estudo desenvolvido, e principalmente da transformada de Fourier para encontrarmos candidatos a solução de problemas envolvendo a equação do Calor, laplaciano, equação BBM(Benjamin, Bona e Mahony) e a equação Linear de Schrödinger. Citemos um desses resultados: o candidato que encontramos a solução do problema que envolvia a equação do calor foi

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)K(x-y,t)\mathrm{d}y + \int_0^t \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, g(y,s) \, K(x-y, t-s).$$

4.CONCLUSÃO

As principais conclusões da pesquisa, dizem respeito à nossa capacidade de identificar e resolver alguns tipos de problemas de Cauchy envolvendo EDP's, utilizando a transformada de Fourier, e para encontrar candidatos a solução de problemas mais gerais, como, por exemplo, o problema envolvendo a equação BBM no contexto das funções generalizadas.

DIAS, T.G. MELO, M.M. A Transformada de Fourier e Aplicações. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 3.,2006, Goiânia. **Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica** [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p.

5.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUEIREDO, D. G. DE, "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", 4ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

IÓRIO, V. DE M., "EDP Um Curso de Graduação", 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

---

[1]Bolsista de iniciação científica. Instituto de Matemática e Estatística - Campus Jataí, tgddias@yahoo.com.br
[2]Colaborador/Instituto de Matemática e Estatística - Campus Jataí/UFG, fabianoftds@yahoo.com.br
[3]Orientador/Instituto de Matemática e Estatística/UFG, melo@mat.ufg.br