

Algoritmo tipo Projeção e Aplicações

RODRIGUES, Robson de Souza¹; PÉREZ, Luis Román Lucambio²

Palavras-Chave: Projeção, Algoritmo, Restauração de Imagens

1 Introdução (justificativa e objetivos)

Em nosso trabalho com aplicações contractivas demos enfoque à projeção, buscando uma abordagem algorítmica para a resolução de problemas de viabilidade convexa, que consiste em encontrar algum ponto que pertença à intersecção, não-vazia, de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, convexos e fechados.

Uma discussão algorítmica bastante ampla é apresentada por Bausche e Borwein em [2]. Uma aplicação prática desses resultados é proposta por Fung e Chan em [3] para restauração de imagens color-quantizadas.

2 Metodologia

Inicialmente estudamos conceitos básicos como convexidade, projeção ortogonal e outros resultados de Análise Convexa e Álgebra Linear. Definimos o algoritmo para resolução do problema de viabilidade convexa e estudamos os resultados de convergência do mesmo. Na parte final do projeto buscamos implementações práticas para o método estudado como, por exemplo, na restauração de imagens.

Nosso estudo se baseou na literatura citada, principalmente em [2] e [3].

3 Resultados e Discussões

3.1 O Algoritmo

Suponha que D seja um conjunto não vazio, convexo e fechado e sejam $C_1, \dots, C_N$, onde $N < \infty$, subconjuntos convexos e fechados de D com intersecção não vazia:

$$C := \bigcap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$$

Para todo $i \in \{1, \dots, N\}$ e todo $n \geq 0$, suponha que $T_i^{(n)}: D \rightarrow D$ seja firmemente não-expansiva com $Fix T_i^{(n)} \supseteq C_i$, que $\alpha_i^{(n)} \in [0, 2]$ seja um **parâmetro de relaxação** e $\mathbb{R}_i^{(n)} := (1 - \alpha_i^{(n)})Id + \alpha_i^{(n)}T_i^{(n)}$ seja a **relaxação** correspondente de $T_i^{(n)}$ (**sob-relaxada** se $\alpha_i^{(n)} \in [0, 1]$, **sobre-relaxada** se $\alpha_i^{(n)} \in [1, 2]$). Suponha ainda que $(\lambda_i^{(n)})_{i=1}^N$ em $[0, 1]$ seja o **peso**, i.é., $\sum_i = 1^N \lambda_i^{(n)} = 1$, e finalmente que:

$$A^{(n)} = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{(n)} R_i^{(n)}$$

seja a **média peso** das relaxações.

Com estas notações, definimos o **algoritmo** pela seqüência:

$$x^{(0)} \in D \text{ arbitrário, } x^{(n+1)} := A^{(n)} x^{(n)}, \forall n \geq 0$$

assumindo implicitamente que a seqüência $(x^{(n)})$ fica em D .

3.2 Resultado de Convergência

Teorema 1. Teorema de Convergência (condições suficientes) :

i) Se o interior de C é não vazio, então a seqüência $(x^{(n)})$ converge para algum ponto em D ;

ii) Se a seqüência $(x^{(n)})$ tem uma subsequência $(x^{(n')})$ com $d(x^{(n')}, C) \rightarrow 0$, então a seqüência $(x^{(n)})$ converge para algum ponto em C .

3.3 Aplicação

O Problema: Uma imagem de entrada X é escaneada e processada [3] para produzir a imagem codificada Y . O problema consiste em, a partir da imagem codificada Y , gerar uma seqüência X^k que se aproxime da imagem original, usando para isso um algoritmo de projeção em conjuntos convexos.

O Algoritmo: Seja X^k a aproximação de X , na iteração k , e sejam P_1 , P_2 e P_3 as projeções nos conjuntos S_1 , S_2 e S_3 , respectivamente. Formulamos o algoritmo como

$$X^{(k+1)} = P_3 P_{2(N,N)} \cdots P_{2(i,j)} \cdots P_{(1,1)} P_1 X^k \quad (1)$$

No algoritmo proposto para resolver o problema, fazemos a projeção em três tipos de conjuntos convexos de restrição, denotados por S_1 , $S_{2(i,j)}$ e S_3 .

4 Conclusão

Durante nossos estudos provamos que satisfeitas as condições sobre $\mu_i^{(n)}$ e $\alpha_i^{(n)}$, partindo de um x_0 qualquer e usando como critério de parada $\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| < \epsilon$, os cálculos serão interrompidos após um número finito de iterações. O teorema de convergência não garante que o último ponto calculado seja solução do problema.

Além da aplicação proposta para restauração de imagens o método algorítmico estudado apresenta uma ampla aplicação em diversas áreas como ressonância magnética e sensoramento remoto.

Referências

- [1] Avriel, Mordecai; *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Vol. 1; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs - N.J., (1976).
- [2] Bauschke, Heinz H. ; Borwein, Jonathan M. *On Projection Algorithms for Solving Convex Feasibility Problems*, SIAM Review, Vol. 38, pp. 367-426 (1996).
- [3] Fung, Yik-Hing ; Chan, Yuk-Hee; *A regularized constrained iterative restoration algorithm for restoring color-quantized image*, Signal Processing, **85**, pp. 1375-1387 (2005).
- [4] Iusem, Alfredo; Pierro, Alvaro R.; *A Simultaneous Projection Method for Linear Inequalities*, Linear Algebra and its Applications, **64**, pp. 243-253, (1985)
- [5] Iusem, Alfredo; Pierro, Alvaro R.; *Convergence Results for an Accelerated Nonlinear Cimmino Algorithm*, Numerische Mathematik, **49**, pp. 367-378, (1986).
- [6] Lima, Elon Lages; *Curso de Análise*, Vol. 1; IMPA-OS/CNPq (Projeto Euclides).
- [7] Luenberger, D.G.; *Optimization by Vector Space Methods*; John Wiley, New York, (1969).
- [8] Mangasarian, O.L.; *Nonlinear Programming*; McGraw-Hill, New York, (1969).
- [9] Quinta, Vanessa; *O Método do Gradiente*, Dissertação de Mestrado em Matemática, Goiânia - GO, (1999).
- [10] Rockafeller, R. T.; *Convex Analysis*; Cambridge University Press, (1970).
- [11] Ryan, Patrick J.; *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*; Cambridge University Press, (1994).
- [12] da Silva Junior, Paulo César; *Algoritmos Tipo Projeção Para o Problema de Viabilidade Convexa*, Dissertação de Mestrado em Matemática , Goiânia-GO (2003).

FONTE DE FINANCIAMENTO: CNPq/PIBIC

¹ Bolsista de Iniciação Científica, Instituto de Matemática e Estatística, UFG, robson.online@yahoo.com.br

² Orientador, Instituto de Matemática e Estatística, UFG, lrlp@mat.ufg.br