COMPARANDO RESULTADOS DE ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA DOIS TIPOS DE EQUAÇÕES DIFERENÇAS

BELISÁRIO, Hugo Leonardo[1]; CRUZ, José Hilário da[2].

Palavras-chave: Equações diferenças lineares, Estabilidade Assintótica e Instabilidade Assintótica.

1. INTRODUÇÃO

O principal objetivo é estudar e comparar as condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica da solução nula da equação do tipo

$$x(n) = ax(n-1) + bx(n-k), \qquad n = 0, 1, ... \tag{1}$$

obtidos em (KURUKLIS, 1994), estudados com detalhes em (BORGES, 2000), com os resultados para a equação do tipo

$$x(n) = ax(n+1) + bx(n+k), \qquad n = 0, 1, ... \tag{2}$$

onde a e b são números reais arbitrários e $k > 1$, obtidos em (DANNAN & ELAYDI, 1990).

2. METODOLOGIA

Os tópicos propostos foram estudados juntamente com as referências complementares e apresentados em seminários semanais, sob a coordenação do orientador.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foi feito um estudo sobre as equações diferenças, na linha de (ELAYDI, 1989) e (MICKENS, 1990), para obter os pré-requisitos e desenvolver o estudo proposto no sub-projeto de pesquisa.

3.1. Introdução às equações diferenças

Foi feito um estudo detalhado sobre funções discretas, equações diferenças, algumas propriedades, definição de grau de uma equação diferença, definição de equação diferença linear, o teorema da existência e unicidade da solução de uma problema de valor inicial, a operação translação, derivada discreta e a antí-derivada discreta.

Também foram estudadas as soluções de uma equação diferença linear de ordem n, soluções linearmente dependentes e soluções linearmente independentes, determinante casoratiano, polinômio característico e solução geral de uma equação diferença linear com coeficientes constantes.

[1]Bolsista de iniciação científica. Instituto de Matemática e Estatística, hugo_matematic@yahoo.com.br.

[2]Orientador. Instituto de Matemática e Estatística, jhilario@mat.ufg.br.

3.2. Estabilidade assintótica da equação $x(n) = ax(n-1) + bx(n-k)$

O estudo das regiões de estabilidade assintótica da equação (1) no plano dos parâmetros a e b foi feito estudando os resultados obtidos em (BORGES, 2000), (KURUKLIS, 1994) e (RIBEIRO, 2003). Assim estudar as regiões de estabilidade assintótica é estudar valores para a e b para os quais todas as raízes do polinômio característico possui módulo menor que 1

3.3. Estabilidade assintótica da equação $x(n) = ax(n+1) + bx(n+k)$

Já o estudo das regiões de estabilidade assintótica equação (2) foi feito nos moldes de (DANNAN & ELAYDI, 1990) com um pouco mais de aprofundamento nas demontração e resultados já que o texto original está em lingua inglesa e bastante resumido. Neste caso também temos que estudar os valores de a e b para os quais todas as raízes do polinômio característico possui módulo menor que 1.

3.4 Comparando resultados de estabilidade

Comparando todos os resultados foi possível construir a tabela:

Estudos \ Pesquisadores	Kuruklis	Dannan & Elaydi
Equações	$x(n) = ax(n-1) + bx(n-k)$	$x(n) = ax(n+1) + bx(n+k)$
Polinômio característico	$-\lambda_1^k + a\lambda_1^{k-1} + b$	$b\lambda_2^k + a\lambda_2 - 1$
Condições p/ estabilidade	$\lvert\lambda_1\rvert < 1$	$\lvert\lambda_2\rvert < 1$
Polinômio transformado	$-\mu_1^k + \mu_1^{k-1} + c$	$c\mu_2^k + \mu_2 - 1$
Condições de estabilidade	$\lvert\mu_1\rvert < \frac{1}{\lvert a\rvert}$	$\lvert\mu_2\rvert < \lvert a\rvert$
Relação entre μ_1 e μ_2	$\mu_1 = \frac{\mu_2}{a^2}$	$\mu_2 = a^2\mu_1$
Relação entre λ_1 e λ_2	$\lvert\lambda_1\rvert < 1 \Leftrightarrow \lvert\lambda_2\rvert > 1$	$\lvert\lambda_2\rvert < 1 \Leftrightarrow \lvert\lambda_1\rvert > 1$

Da última relação da tabela foi possível concluir que, se todas as raízes da equação característica de (1) tem módulo menor do que 1, então todas as raízes da equação característica de (2) tem módulo maior que 1 e vice-versa. Assim, a região de estabilidade absoluta de (1) é a região de instabilidade absoluta de (2) e a região de instabilidade absoluta de (1) é a região de estabilidade absoluta de (2). Veja Fig. 1.

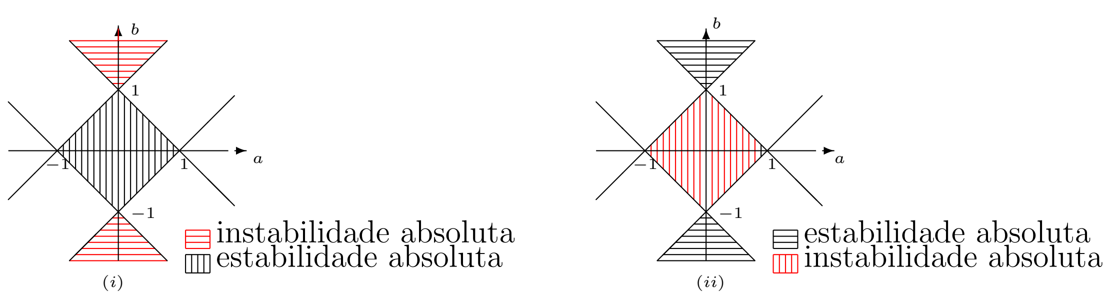

Figura 1: (i) Equação com retardamento e (ii) Equação avançada

Além disso, foi possível concluir que se l $(l < k)$ raízes do polinômio característico da equação (1) tem módulo menor que 1 então exatamente l raízes do polinômio característico da equação (2) tem módulo maior que 1. Com a partição do plano dos parâmetros feita em (CRUZ & SANTOS, 2003) para a equação (1) podemos determinar exatamente o número de raízes maiores que 1 que a equação (2) possui em cada região. Veja Fig. 2.

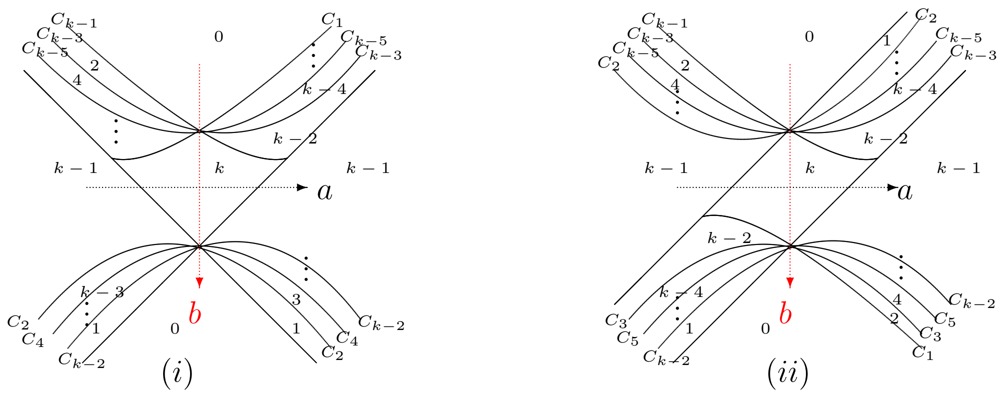

Figura 2: (i) k-par e (ii) k-ímpar

4. CONCLUSÃO

Portanto determinar a região de estabilidade no plano dos parâmetros a e b das duas equações se resumem a um único trabalho, pois se determinarmos as região de estabilidade da equação (1) segundo o número de raízes da equação (1) que estão dentro do circulo unitário estaremos ao mesmo tempo determinando as regiões de estabilidade de (1) e (2).

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORGES, M. *Estabilidade Assintótica e Periodicidade de uma Classe de Equações Diferenças*, Dissertação de Mestrado em Matemática, IME/UFG, 2000.

CLARK, C.W., *A Delay-Recruitment Model of Population Dynamics, with an Application to BallenWhale*, Populations, J. Math. Biol., 1976, vol. 3, pp. 381-391.

CRUZ, J. H. e SANTOS, R. A. *Uma nota sobre a estabilidade e instabilidade da equação* $x(t) - ax(t-1) + bx(t-\ell) = 0$, 58^0 Seminário Brasileiro de Análise, Novembro de 2003.

CRUZ, J. H. e SANTOS, R. A., *As regiões de estabilidade, no plano dos parâmetros a e b, da equação* $x(t) - ax(t-r) - bx(t-s) = 0$, 60º Seminário Brasileiro de Análise, 2004, 275-284.

DANNAN, F.M. and ELAYDI, S.N., *Asymptotic Stability of Linear Difference Equations of Advanced Type*, Technical Report no. 60 , 2000, pp. 1-15, htpp://www.trinity.edu/departments/mathematics. 8. Mun, F., Khaoticheskie kolebaniya (Random Oscillations), Moscow: Mir, 1990.

ELAYDI, S.N., *An Introduction to Difference Equations.* Springer, 1989.

LEVIN, S.A. and MAY, R., *A Note on Difference-Delay Equations*, Theor. Pop. Biol., 1976, vol. 9, pp. 178-187.

MICKENS, E. R., *Difference Equations. Theory and Applications.* Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
KURUKLIS, S. A., *The asymptotic stability of* $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$. Journal of Math. Analysis and Aplications, 188, 719-731, 1994.
RIBEIRO, A. L. M., *Estabilidade de uma classe de equações diferenças*, Relatório PIBIC, http://www.mat.ufg.br/docentes/jhcruz/orientacoes.html, 2003.