LIMA, L. S. Monteiro, MOTA, J. C.Teoria e métodos para o modelo de combustão de Chapman−Jouguet. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 3., 2006, Goiânia. Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p.

Teoria e métodos para o modelo de combustão de Chapman−Jouguet

LIMA, Lidiane dos Santos Monteiro[1]; **Da MOTA**, Jesus Carlos[2]

Palavras-chaves: Métodos numéricos

1 introdução

Neste trabalho apresentamos um método de diferenças finitas para resolver numericamente certos problemas de Cauchy para a equação da onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ c \text{ constante},$$

equação do calor

$$u_t - a u_{xx} = 0, \quad a \text{ constante}$$

e a equação que modela uma lei de conservação escalar

$$u_t + a u_x = 0, \quad a \text{ constante}.$$

Para a equação da onda consideramos condições iniciais da forma

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Para as outras equações consideramos condições da forma $u(x, 0) = u_0(x)$.

As equações são aproximadas por diferenças finitas numa rede discreta do plano (x, t) formada por pontos da forma $x = mh$ e $t = nk$, onde $m,\ n \in N$ e $h,\ k \in \mathbb{R}_+$. Denotamos $u(mh, nk)$ por $u_{m,n}$. O sotware usado nas implementações foi o MATLAB.

2 Metodologia

Uso do acervo bibliográfico para estudo e compreensão das equações bem como das suas soluções exatas e aproximadas e apoio computacional para melhor visualização dos resultados.

3 Resultados e discussão

O esquema de diferenças finitas para a equação da onda é dado por

$$u_{m,n+1} = 2u_{m,n} + \frac{c^2k^2}{h^2}[u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}] - u_{m,n-1} \tag{1}$$

O esquema fornece a solução aproximada no tempo $t = (n+1)k$ em função da solução nos dois níveis de tempo imediatamente anteriores. O esquema (1) converge se $ck/h \leq 1$.

Para a equação do calor usamos o seguinte esquema de diferenças finitas

$$u_{m,n-1} = u_{m,n} - \frac{ak}{h^2}[u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}] \tag{2}$$

Para resolver esta equação temos que resolver o seguinte sistema linear algébrico

$$\begin{pmatrix} \frac{1+2k}{h^2} & \frac{-k}{h^2} & 0 \;\dots & 0 \\ \frac{-k}{h^2} & \frac{1+2k}{h^2} & \frac{-k}{h^2} \;\dots & 0 \\ & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 \;\dots & \frac{1+2k}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ u_{m-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,n-1} + \frac{k}{h^2}u_{0,n} \\ u_{2,n-1} \\ \vdots \\ u_{m-1,n-1} + \frac{k}{h^2}u_{m,n} \end{pmatrix}$$

Neste caso o esquema converge para a solução exata da equação independente de qualquer relação entre h e k.

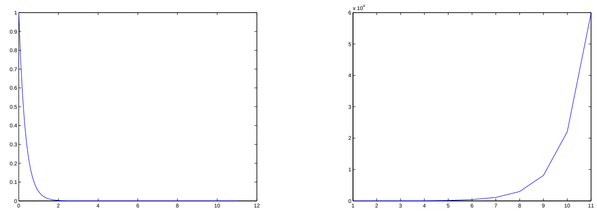
Para a equação de uma lei de conservação escalar foi usado o método de diferenças retardadas que fornece o seguinte esquema numérico

$$u_{m,n+1} = u_{m,n} - \frac{ak}{2h}u_{m+1,n} - u_{m-1,n}.$$

O esquema acima nos diz que para avançarmos para o nível de tempo $t = (n+1)k$ temos que saber a solução no nível de tempo n.

Este esquema foi implementado no MATLAB e foi obtido a solução numérica em cada nível de tempo. Segue abaixo os gráficos da solução exata e da solução aproximada, respectivamente, para a equação que modela uma lei de conservação escalar.

LIMA, L. S. Monteiro, MOTA, J. C.Teoria e métodos para o modelo de combustão de Chapman−Jouguet. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 3., 2006, Goiânia. Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p.



Este esquema não converge para a solução aproximada, como pode ser visto nos gráficos acima.

4 Conclusão

O esquema de diferenças finitas usado para a equação do calor foi o mesmo esquema utilizado para a equação da lei de conservação escalar. Isto mostra que a convergência da soluções aproximadas para as soluções exatas dependem fortemente do esquema de diferenças finitas da equação.

Referências

[1] PAES-LEME, P.J , *Métodos de Diferenças Finitas para as Equações da Onda, Calor e Laplece.* PUC-RJ, Rio de Janeiro,1983.

[2] LEVEQUE, RANDALL J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, ,Boston, Berlin, 1992.

[3] REDFERN, D, CAMPBELL, COLIN , *The Matlab Handbook*, Springer-Velarg,NY, 1997.

[1] Bolsista de Iniciação Científica. Instituto de Matemática e Estatística, lidynet@hotmail.com

[2] Orientador Instituto de Matemática e Estatística, jesus@mat.ufg.br