CINTRA, A. A. Da Silva, G. J. P. Algoritmo Híbrido Ponto Proximal - Projeção. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 3., 2006, Goiânia. Anais eletrônicos do XIV Seminário de Iniciação Científica [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2006. n.p.

Estudo do Algoritmo Híbrido Ponto Proximal - Projeção

CINTRA, Adriana Araujo[1]; **Da Silva**, Geci José Pereira[2]

Palavras-chaves: Projeção, Algoritmo, Convergência.

1. INTRODUÇÃO

Apresentamos o Algoritmo Híbrido Ponto Proximal - Projeção proposto por Solodov e Svaiter [2] para resolver o seguinte problema:

$$\text{Achar } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in T(x), \tag{1}$$

onde $T(\cdot)$ é um operador monótono maximal (ou uma multifunção) sobre $\mathbb{R}^n$. Observamos que o problema de programação convexa

$$\min_{x \in C} f(x), \tag{2}$$

onde $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo pode ser escrito como

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \delta_C(x), \tag{3}$$

onde

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in C \\ \infty, & \text{se } x \notin C. \end{cases} \tag{4}$$

E, (3) é equivalente a

$$\text{Achar } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in \partial f(x) + \mathcal{N}_C(x), \tag{5}$$

onde $\partial f(\cdot)$é o subdiferencial de f e $\mathcal{N}_C(\cdot) = \partial_C(\cdot)$ é o operador normal. Assim, tomando $T(\cdot) = \partial(\cdot) + \mathcal{N}_C(\cdot)$ temos que o problema de programação convexa (2) pode ser escrito como o problema (1). Portanto, resolvendo o problema (1) estaremos resolvendo o problema de otimização convexa acima.

O algoritmo propõe uma modificação do método do ponto proximal clássico, onde uma iteração proximal aproximada é usada para construir um hiperplano que separa estritamente o conjunto solução da iterada atual, e assim a próxima iterada é obtida projetando a iterada atual sobre o hiperplano separador ficando mais próxima do conjunto solução do que a iterada anterior. O algoritmo apresenta uma estrutura mais prática do ponto de vista computacional e a convergência do algoritmo proposto é obtida com condições menos restritivas do que os encontrados na literatura (por exemplo, veja Rockafellar [1]).

2. METODOLOGIA

A abordagem do assunto foi feita através de estudo dos conceitos básicos de análise convexa, como o estudo de funções convexas e conjuntos convexos, o Teorema de Separação de Conjuntos Convexos, Projeção em conjuntos convexos, subdiferenciabilidade de funções convexas, estudo de álgebra linear, cálculo vetorial e análise numérica, e por meio de pesquisa bibliográfica, bem como do uso do softwares e seus recursos algébricos e geométricos.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considerando que temos x^i, uma aproximação para a solução de (1), o algoritmo do ponto proximal gera a próxima iterada resolvendo o subproblema:

$$\text{Achar } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 \in T(x) + \mu_i(x - x_i), \tag{6}$$

onde $\mu_i > 0$ é um parâmetro de regularização. Como resolver (6) exatamente pode ser tão difícil quanto resolver o problema original (1), é interessante do ponto de vista prático (implementação) quando os subproblemas são resolvidos aproximadamente, isto é,

$$\text{Achar } x^{i+1} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 = v^{i+1} + \mu_i(x^{i+1} - x^i) + \varepsilon^i, \tag{7}$$

onde $\varepsilon^i \in \mathbb{R}^n$ é um erro associado com a solução inexato do subproblema (7) e $v^{i+1} \in T(x^{i+1})$.

O Algoritmo proposto por Solodov e Svaiter usa uma iterada inexata para construir um hiperplano que separa estritamente a iterada atual (x^i) do conjunto solução do problema, então a próxima iterada, do algoritmo que iremos propor, é obtida como uma projeção da iterada atual no hiperplano e assim estará mais próxima do conjunto solução do que a iterada atual.

Algoritmo 1. *Escolha qualquer $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e um $\sigma \in [0, 1)$. Tomando x^i, escolha $\mu_i > 0$ e encontre $y^i \in \mathbb{R}^n$, tal que*

$$0 = v^i + \mu_i(y^i - x^i) + \varepsilon^i, v^i \in T(y^i), \tag{8}$$

onde

$$\|\varepsilon^i\| \leq \sigma \max \|v^i\|, \mu_i\|y^i - x^i\|. \tag{9}$$

Pare se $v^i = 0$ ou $y^i = x^i$. Caso ao contrario, tome

$$x^{i+1} = x^i - \frac{\langle v^i, x^i - y^i\rangle}{\|v^i\|^2} v^i \tag{10}$$

Provamos convergência do Algoritmo 1, escolhendo os parâmetros μ_k de forma que $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i^{-2} = \infty$, o que torna o algoritmo totalmente implementável.

Exemplo 1. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um operador monótono maximal.*

$$T(x) = Ax, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Então o Algoritmo (1) transforma-se num sistema de equações lineares o qual tem uma única solução $\bar{x} = (0, 0)^T$. Supondo $x^i = (1, 0)^T$ e $\mu_i = 1$. É fácil checar que o ponto $y^i = (0, 1)^T$ é admisivel de acordo com (9) e (10). Na verdade,

$$\begin{aligned} 0 &= T(y^i) + \mu_i(y^i - x^i) + \varepsilon^i && (12)\\ &= (1, 0)^T + ((0, 1)^T - (1, 0)^T) + \varepsilon^i = (1, 0)^T - (-1, 1)^T + \varepsilon^i && (13)\\ &= (0, 1)^T + \varepsilon^i. && (14) \end{aligned}$$

Logo $\varepsilon^i = (0, -1)^T$. Então, temos que $\|\varepsilon^i\| = 1$ enquanto $\|y^i - x^i\| = \sqrt{2}$. Portanto, (9) é satisfeita com $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De fato, pegando $\sigma \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ é possível construir uma seqüencia satisfazendo (8) e (9) e $x^{i+1} := y^i$, tal que $\|x^i\| \to \infty, i \to \infty$. Por outro lado, se a projeção (10) é adicionada depois que y^i é computado, nós obtemos a solução do exemplo acima considerando apenas uma projeção porque $P_{H_i}[x^i] = 0$.

4. CONCLUSÃO

Apresentamos o Algoritmo Híbrido Ponto Proximal-Projeção juntamente com Método Clássico ponto proximal. Em particular, nós mostramos que o tolerância exigida para a solução de subproblemas ponto proximal pode ser significadamente facilitada resolvendo cada subproblema como uma projeção num hiperplano separador que separa a iterada corrente do conjunto solução do problema. Nós enfatizamos que o algoritmo híbrido ponto proximal retém todas as propriedades de convergência do algoritmo ponto proximal clássico.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ROCKAFELLAR, R.T. Monotone operators and the proximal point algorithms. SIAM Journal of Control and Optimization, 14, p. 877-898,1976.

2. SOLODOV, M. V. SVAITER, B. F. A hybrid projection-proximal point algorithm. Journal of Convex Analysis, 6, p. 59-70, 1999.

[1] Bolsista de Iniciação Científica. Instituto de Matemática e Estatística, drickynha_mat@hotmail.com

[2] Orientador Instituto de Matemática e Estatística, geci@mat.ufg.br