INTEGRABILIDADE VIA TEORIA DE DARBOUX

Ubirajara CASTRO[1] e João MEDRADO[2].

1 INTRODUÇÃO

Um sistema de equações diferenciais polinomial no plano, ou simplesmente sistema polinomial, é dado na forma $(\dot{x}, \dot{y}) = (P(x, y), Q(x, y))$, onde P, Q são polinômios nas variáveis x e y com coeficientes reais. Neste trabalho, $m = max\{grau(P), grau(Q)\}$ será denotado o grau do sistema polinomial.

A teoria algébrica da integrabilidade é clássica. Em 1878, Darboux mostrou um *link* entre a geometria algébrica e a determinação de integrais primeira e mostrou como construir a integral primeira de sistemas polinomiais.

Antes de apresentarmos o Teorema de Darboux nós precisamos de algumas definições. Se $S(x, y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x^i y^j$ é um polinômio de grau $m - 1$ com $m(m + 1)/2$ coeficientes em $\mathbb{C}$, então nós escrevemos $S \in \mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ Nós identificamos o espaço vetorial linear $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ com $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$ através do isomorfismo $S \to (a_{00}, \ldots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \ldots, a_{0,m-1})$.

Diremos que r pontos $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$, $k = 1, ..., r$, são *independentes* com respeito a $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ se a intersecção de r hiperplanos

$$\{(a_{ij}) \in \ \mathbb{C}^{m(m+1)/2)} : \sum_{i+j=0}^{m-1} x_j^i y_k^j a_{ij} = 0, k = 1, ..., r\},$$

é um subespaço linear de $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$ de dimensão $m(m + 1)/2 - r > 0$.

Um ponto singular, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$, é aquele onde $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Observa-se que o número máximo de pontos singulares isolados do sistema polinomial em questão é m^2 (pelo Teorema de Bezout), que o número máximo de pontos singulares isolados independentes do sistema é $m(m+1)/2-1$, e que $m(m+1)/2 < m^2$ para $m \geq 2$.

Diremos que o sistema é *integrável* em um subconjunto aberto U de um corpo $\mathbb{F}^2$ se existe uma função analítica não–constante $H : U \to \mathbb{F}$, chamada *integral primeira* do sistema em U, que é constante em todas curvas soluções $(x(t), y(t))$ do sistema em U; i.e., $H(x(t), y(t))$ = constante para todo valor de t para qual a solutção $(x(t), y(t))$ está definida e contida em U.

Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$; i.e., f é um polinômio com coeficentes complexos nas variáveis x e y. A curva algébrica complexa $f(x, y) = z$ é uma *curva algébrica invariante* de um campo vetorial X se para algum polinômio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ nós tivermos

$$Xf = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

O polinômio K é chamado o *cofator* da curva algébrica invariante $f = 0$. Observamos que se o sistema polinomial tem grau m, então qualquer cofator tem no máximo grau $m - 1$.

[1]Bolsista PIBIC – CNPq, Instituto de Matemática e Estatística – UFG, ubirajara_castro@yahoo.com
[2]Orientador PIBIC, Instituto de Matemática e Estatística – UFG, medrado@mat.ufg.br

Palavras-chave: Integrabilidade, campos vetoriais, integrais primeiras.

Seja h, $g \in \mathbb{C}[x, y]$ e assuma que h e g são primos entre si no anel $\mathbb{C}[x, y]$. Então a função $\exp(g/h)$ é chamada *fator exponencial* do sistema polinomial se para algum polinômio $K \in \mathbb{C}[x, y]$ de grau no máximo $m - 1$ valer

$$X\left(exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = Kexp\left(\frac{g}{h}\right).$$

Onde K é o cofator do fator exponencial exp(g/h).

Um ponto singular (x_0, y_0) do sistema diferencial é chamado *fraco* se a divergencia do sistema em (x_0, y_0) é zero.

Com essas considerações em mente, podemos enunciar o

Teorema de Darboux: *Suponha que um sistema polinomial diferencial de grau m admita p curvas algébricas invariantes irredutíveis* $f_i = 0$ *com cofatores* K_i *para* $i = 1, ..., p$, *q fatores exponenciais* $exp(g_j/h_j)$ *com cofatores* L_j *para* $j = 1, ..., q$, *e r pontos singulares independentes* (x_k, y_k) *tal que* $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ *para* $i = 1, ..., p$ *e para* $k = 1, ..., r$. *Note que os fatores irredutíveis dos polinômios* h_j *são alguns* $f_i's$.

(a) *Existem* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *nem todos zero tal que* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbb{K}_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$, *se, e somente se a função*

$$f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\left(exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1}...\left(exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q},$$

é uma *integral primeira* do sistema polinomial diferencial real se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

(b) *Se* $p + q + r = [m(m + 1)/2] + 1$, *então existe* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ *nem todos zero tal que* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbb{K}_i + \sum_{i=j}^{q} \mu_j \mathbb{L}_j = 0$.

(c) Se $p + q + r \geq [m(m + 1)/2] + 2$, então o sistema polinomial diferencial tem uma primeira integral racional, e consequentemente todas trajetórias do sistema estão contidas em curvas algébricas invariantes.

(d) Existem $\lambda_i, \mu_j \in (C)$ nem todos zero tal que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbb{K}_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div(P, Q)$, se, e somente se, a função

$$f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\left(exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1}...\left(exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q},$$

é um fator integrante do sistema polinomial diferencial, real se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

(e) Se $p + q + r = m(m + 1)/2$ e os r pontos singulares independentes são fracos, então a função

$$f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\left(exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1}...\left(exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q},$$

por conveniência $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ nem todos nulos é uma primeira integral se $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div(P, Q)$.

(f) Existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ nem todos nulos tal que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbb{K}_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -s$ para algum $s \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$, se, e somente se, a função

$$f_1^{\lambda_1} ... f_p^{\lambda_p} \left(exp \left(\frac{g_1}{h_1} \right) \right)^{\mu_1} ... \left(exp \left(\frac{g_q}{h_q} \right) \right)^{\mu_q} exp(st),$$

é uma invariante do sistema polinomial diferencial, real $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Os campos vetoriais quadráticos têm sido muito estudados e temos aproximadamente cerca de 1000 artigos publicados sobre o assunto, mas ainda é um problema aberto saber quais são integráveis.

O nosso objetivo principal é verificar a integrabilidade de campos vetoriais quadráticos reversíveis do tipo $(2,0)$, ou seja, campos polinomiais no plano de grau 2 e que tem uma anti–simetria, ou melhor, campos X que satisfazem:

$$D\varphi X = -X\varphi$$

onde φ é uma involução, i.e., $\varphi \circ \varphi = Id$, tal que a dimensão dos seus pontos fixos é zero. Em (Medrado, Llibre[3]), foram classificados todos os retratos de fase do tipo $(2,1)$ e queremos fazer o mesmo prara os campos vetoriais quadráticos do tipo (2,0), ou seja, campos polinomiais no plano de grau 2 e que tem uma anti–simetria, ou melhor, campos

$$X : \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = a(1 - x^2) + bxy + y^2 \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

2 METODOLOGIA

Revisão e estudo da bibliografia pertinente, além do auxílio do software matemático Maple através de uma rotina implementada neste pelo Professor João Carlos da Rocha Medrado.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Usaremos a seguir um exemplo simples de um campo vetorial reversivel do tipo (2,1) para exibirmos a utilização desta técnica, ou seja, o Teorema de Darboux.

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Determinemos curvas algébricas invariantes irredutíveis para este sistema. Considere a função $f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y$ uma curva algébrica invariante. Vamos encontrar o valor dos coeficientes e o cofator $K = \alpha$, tal que

$$X\nabla f = Kf \Rightarrow \langle (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}), (y, x) \rangle = \alpha(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y) \quad (1)$$

Donde tiramos que $a_{10} = \alpha a_{01}$ e $a_{01} = \alpha a_{10}$, e com isso temos que $\alpha = \pm 1$, daí, $K = \pm 1 \Rightarrow a_{01} = \pm a_{10}$.

Para $K_1 = 1$ e $K_2 = -1$, temos que f_1 e f_2 são dadas por $f_1(x, y) = x + y$ e $f_2(x, y) = x - y$, respectivamente. Pelo item (a) do Teorema de Darboux, existe uma integral primeira, pois $K_1 + K_2 = 0$, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Assim, $H(x, y) = f_1^{\lambda 1}.f_2^{\lambda 2}$ é uma integral primeira, ou seja, $H(x, y) = x^2 - y^2$, satisfaz $\nabla H.X = 0$.

4 CONCLUSÃO

Como pudemos ver, apesar do exemplo aqui demonstrado não apresentar muita dificulade na sua resolução, a Teoria de Darboux é uma ferramenta na determinação de integrais primeiras para sistemas de equações diferenciais no plano. Usaremos esta teoria para buscar integrais primeiras para o sistema

$$X : \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = a(1 - x^2) + bxy + y^2 \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Observamos ainda que, em princípio não sabemos se encontraremos um número suficiente de curvas invariantes algébricas, fatores exponenciais e pontos singulares, para construirmos uma integral primeira para estes campos vetoriais usando o Teorema de Darboux. Iniciamos o trabalho em janeiro quando participamos do curso de Álgebra Linear no verão, e posteriormente o estudo de equações diferenciais.

Referências

[1] D. G. Figueiredo, *Equações diferenciais aplicadas*, IMPA, (1997)

[2] J. Chavarriga, H. Giacomini, M. Grau, *Necessary conditions for existence of invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, Bull. Sci. math. **129** (2005), 99–126.

[3] J. C. R. Medrado and J. Llibre, *Darboux integrability and reversible quadratic vector fields*, to appear in Rocky Mountain Journal.

[4] J. Llibre, *Integrability of polynomial differential systems, Ordinary differential equations*, Vol. 1, Elsevier B. V., Barcelona (2004).

[5] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems, Texts in applied mathematics*,Vol. 7, Springer–Verlag, New York. (1991)