

Aplicação da Projeção em Algoritmo para o Problema de Viabilidade Convexa

RODRIGUES, Robson de Souza¹; PÉREZ, Luis Román Lucambio²

Palavras-Chave: Projeção, Viabilidade Convexa, Algoritmo de Cimmino.

1 Introdução (justificativa e objetivos)

Em programação matemática para estudarmos o problema convexo com restrições dispomos atualmente de vários métodos iterativos. Em um desses métodos o ponto inicial dado deve pertencer ao conjunto viável do problema considerado. Encontrar este ponto é um problema de viabilidade convexa, sendo que encontrar tal ponto, geralmente, é tão complexo quanto resolver todo o problema convexo com restrições que se está considerando. Uma versão do algoritmo de Cimmino para resolução do problema de viabilidade convexa em dimensão finita é apresentada por Alfredo N. Iusem e Alvaro R. de Pierro no artigo "Convergence Results for an Accelerated Nonlinear Cimmino Algorithm" publicado em 1986. Um exemplo de aplicação do algoritmo para o problema linear consiste em encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $b^1 \leq Ax \leq b^2$, onde A é uma matriz $m \times n$ (sem filas nulas), b^1 e b^2 são vetores de $\mathbb{R}^m$ tal que $b^1 < b^2$.

2 Metodologia

Estudamos a aplicação projeção na formulação de algoritmos práticos de otimização convexa. Definimos um algoritmo para resolução do problema de viabilidade convexa não-linear em dimensão finita. Estudamos o comportamento do algoritmo, inicialmente com alguns exemplos numéricos. Provamos que a versão não-linear converge localmente para uma solução do mínimo quadrado ponderado no caso geral e globalmente para uma solução possível no caso consistente. Ao final estudamos uma aplicação do método para o problema linear. Nosso estudo se baseou na literatura citada na bibliografia, principalmente em [2].

3 Resultados e Discussões

3.1 O Algoritmo

Sejam $C_1, C_2, \dots, C_m$ conjuntos convexos e fechados em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ números reais tal que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad 0 < \lambda_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

Seja $P_i: \mathbb{R}^n \rightarrow C_i$ a projeção no conjunto C_i , isto é,

$$P_i x = \arg \min_{y \in C_i} \|x - y\|,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. Definimos $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$P = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$, seja $I(x) = \{i : x \notin C_i\}$ e $C(x)$ a cardinalidade do conjunto $I(x)$. Definimos

$$\mu(x) = \begin{cases} (\sum_{i \in I(x)} \lambda_i)^{-1} & , \text{ se } C(x) \geq 2 \\ 1 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja:

$$\bar{P}x = x + \mu(x)(Px - x).$$

Definimos então o algoritmo pela sequencia: (para um ponto inicial x^0)

$$x^{k+1} = \bar{P}x^k. \quad (1)$$

3.2 Resultado de Convergência

Seja $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Px = x\}$, isto é, F é o conjunto dos pontos fixos do operador P . Pela definição do operador $\bar{P}$, segue imediatamente que F também é o conjunto dos pontos fixos de $\bar{P}$. Consideremos também o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in F \text{ tal que } \|x - z\| \leq \rho\}$, onde $\rho = \frac{1}{2} \min_{i \in I} \{\|P_i z - z\|, \forall z \in F\}$. Por convenção, $\rho = \infty$ se $I = \emptyset$.

Teorema de Convergência:

i) Se $F \neq \emptyset$ e $x^0 \in B$ então a sequência definida em (1) converge para um ponto em F , que minimiza uma combinação convexa (com coeficientes λ_i) dos quadrados das distâncias aos conjuntos C_i ;

ii) No caso consistente, isto é, $C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$, a sequência definida por (1) converge para um ponto em C , qualquer que seja o ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

4 Conclusão

A principal vantagem do algoritmo definido por (1) em relação ao algoritmo original de Cimmino, definido pelo operador P , está na aceleração alcançada quando $\mu(x)$ assume um valor grande. Tome por exemplo o caso de pesos iguais, isto é, $\lambda_i = \frac{1}{m}$ ($1 \leq i \leq m$). Neste caso $\mu(x) = \frac{m}{C(x)}$. Para $x \in B$ obtemos que, para qualquer $z \in F$:

$$\|\bar{P}x - z\|^2 \leq \|Px - z\|^2 - \|Px - \bar{P}x\|^2 = \|Px - z\|^2 - \left(\frac{m}{C(x)} - 1\right) \|Px - x\|^2.$$

Portanto o algoritmo definido por (1) vai gerar, a partir de x , um ponto que está mais perto de qualquer ponto de F (no sentido do quadrado da norma) do que o gerado, a partir do mesmo x , pelo método original de Cimmino por uma quantidade pelo menos tão grande quanto $\left(\frac{m}{C(x)} - 1\right) \|Px - x\|^2$. Observe que $\frac{m}{C(x)} - 1 \geq 0$. Se m é muito grande (em aplicações como tomografia computadorizada m pode ser maior que 300.000) e $C(x)$ é muito menor que m , $\frac{m}{C(x)} - 1$ se torna muito grande a aceleração é mais significativa.

5 Referências Bibliográficas

- [1] Avriel, Mordecai; *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Vol. 1; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs - N.J. (1976).
- [2] Iusem, Alfredo; Pierro, Alvaro R.; *Convergence Results for an Accelerated Nonlinear Cimmino Algorithm*, Numerische Mathematik, **49**, pp. 367-378 (1986).
- [3] Luenberger, D.G.; *Optimization by Vector Space Methods*; John Wiley, New York, (1969).
- [4] Mangasarian, O.L. ; *Nonlinear Programming*; McGraw-Hill, New York, (1969).
- [6] Rockafeller, R. T. ; *Convex Analysis*; Cambridge University Press, (1970).

FONTE DE FINANCIAMENTO - CNPq/PIBIC

¹Bolsista de iniciação científica. Instituto de Matemática e Estatística,
robson_online@yahoo.com.br

² Orientador. Instituto de Matemática e Estatística/UFG, lrlp@mat.ufg.br