MASSA.Lindemberg Sousa; SILVA. Romildo da Silva.; Gráficos Mínimos, folheados por retas, no espaço euclidiano tri-dimensiional. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 2., 2005, Goiânia. **Anais eletrônicos do XIII Seminário de** Iniciação **Cientifica** [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2005. n.p.

GRÀFICOS MÌNIMOS, FOLHEADOS POR RETAS, NO ESPAÇO EUCLIDIANO TRI-DIMENSIONAL

MASSA, Lindemberg Sousa[1]; **PINA**, Romildo da Silva[2]

Palavras-chave: Superfícies, mínima e regrada,

1. INTRODUÇÃO

O estudo das superfícies mínimas vem sendo desenvolvido a mais de dois séculos, despertando o interesse de vários matemáticos ao longo deste período. Historicamente Lagrange que deu início a este estudo, quando introduziu a noção de superfícies mínimas em 1760. Outros grandes matemáticos como Weierstrass, Meusnier, entre outros, também deram sua contribuição.

Nosso objetivo neste trabalho é fazer uma classificação das superfícies que são mínimas e com características especiais, como mínima e regrada, e mínima de revolução.

2. METODOLOGIA

Análise do problema proposto;
Levantamento da bibliografia utilizada;
Estudo individual e reuniões semanais com o orientador.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O estudo de superfícies mínimas deu-se início em 1760, com Lagrange, onde ele considerava superfícies em R^3, como gráfico de funções de classe C^2, $z = f(x,y)$.
Temos que uma condição suficiente para tais superfícies serem mínimas, é que a equação diferencial abaixo tem que ser satisfeita.

$$(1) \qquad F_{xx}(1 + f_y^2) - 2 f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0$$

Sabemos que as superfícies mínimas tem curvatura média $H = (k_1 + k_2)/2$ nula, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais para obter a equação (1) basta calcular a curvatura média de $z = f(x,y)$ e fazer $H = 0$.

Meusnier obteve exemplos de superfícies mínimas com propriedades especiais, como superfícies cujas curvas de níveis são reta. Faremos aqui, um resumo de tal demonstração.

Observamos que tais curvas são dadas implicitamente pela equação, $f(x,y) = c$, e sua curvatura pode ser calculada por:

$$k = (-f_{xx} f_y^2 + 2 f_x f_y f_{xy} - f_{yy} f_x^2)/ |\text{grad } f|^3$$

Assim, reescrevendo a equação (1), obteremos:

$$f_{xx} + f_{yy} = k\,|\text{grad } f|^3$$

Se as curvas de níveis são retas, então k = 0, e f é uma função harmônica, isto é, satisfaz a equação de Laplace.

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$$

A solução para esta equação, considerando que f satisfaz a equação (1), é dada por:

$$f(x,y) = A \operatorname{arctg}[(y-y_0)/(x-x_0)] + B$$

onde A, B, x_0 , e y_0 são constantes. Fazendo algumas mudanças de variáveis, facilmente verificaremos que localmente tal superfície é parte de um plano ou parte de um helicóide dado por.

$$\begin{cases} x - x_0 = u \cos v \\ y - y_0 = u \operatorname{sen} v \\ z - B = Av. \end{cases}$$

Outra superfície mínima clássica é o catenóide, pois este e o plano, a menos de movimentos rígidos, são as únicas superfícies mínimas de revolução. Tais superfícies podem ser obtidas rotacionando em torno do eixo x, no caso do plano, uma reta perpendicular ao eixo x, e no caso do catenóide, rotacionando a catenária, cuja parametrização é dada por:

$$\alpha(x) = (x,\ a \cosh(x/a + b)).$$

O catenóide tem parametrização dada por:

$$X(u,v) = (u,\ a \cosh(x/a + b) \cos v,\ a \cosh(x/a + b) \operatorname{sen} v) .$$

No mesmo trabalho, provamos que qualquer superfície mínima e de revolução é o plano ou o catenóide.

Por final em nosso trabalho provamos um dos principais resultados em superfícies mínimas, que se a superfície for mínima e folheada por reta, esta superfície será o plano ou helicóide. Note que a demonstração feita acima é para superfícies que são gráficos de funções, o estudo envolve um caso mais geral de superfícies em R^3 .

Para tal demonstração pode ser obtida se considerarmos uma superfície M em R^3, parametrizada localmente por:

$$X(s,t) = \alpha(s) + t\,\beta(s)$$

onde $\alpha(s)$ é uma curva perpendicular às retas de M e $\beta(s)$ descreve um campo de vetores unitários ao longo de α nas direções das retas que interceptam $\alpha(s)$.

Seguindo com tais raciocínios chegaremos que a curva $\alpha(s)$ é uma hélice circular dada pela parametrização:

$$\alpha(s) = (A \cos(as),\ A \operatorname{sen}(as),\ bs),$$

onde A, a e b são constantes reais, como β é paralelo a α'', β(s)= (cos(as), sem(as), 0), fazendo u = A + t e v = s obteremos que a superfície X(s,t) terá a parametrização dada por:

$$X(u, v) = (u \cos(as), u\, \mathrm{sen}(as), bv)$$

Portanto, M é um pedaço de um helicóide.

4. CONCLUSÃO

Apesar do estudo de classificação de superfícies ser algo antigo, ainda hoje tal estudo gera muita discussão, pois ainda se tem problemas em abertos e publicações recentes, como o de Meeks e Rosenberg, que em 2003 mostraram que, exceto o plano, o helicóide é a única superfície mínima completa que é simplesmente conexa e propriamente mergulhada em R^3.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[BC] BarBOSA, J. L.; Colares, A. G., Minimal surface in R^3. Lecture notes in Math. (1195)(1986), Springer – Verlag.

[BC1] BarBOSA, J. L.; Carmo, M. P. Helicoids catenoids, and hypersurfaces of R^n, invariant by an 1-paremter group of motions, An. An. Acad. Brasil Ciências. 53(1981), 403-408.

[C] Carmo, M. P. do – Differential Geometry of curves and surfaces, Prentice – Hall, 1976.

[T] Tenenblat, K. – Introdução à geometria diferencial, Editora UNB, Brasilia, 1988.

[B] BLAIR, D. E. VASTONE J. R., A Generalization of the helicoids in Monomal submanifolds and geodesic pp. 13-16, Kaigai Publications, Tokio, 1978.

[L] LAWSON, H. , Complet minimal surfaces in S^3. Ann. Of Math 92(1970), pp. 335-371.

[S] SOUSA, M. A. Guimarães., Hipersuperfícies Mínimas Folheadas por Geodésicas em Formas Espaciais 4-Dimensionais pp. 34-37, UFG, 2003

[CO] COSTA, C. J.,, Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas, IMPA, 18º CBM.

FONTE DE FINANCIAMENTO – CNPq/PIBIC

[1] Bolsista de iniciação científica. Instituto de Matemática e Estatistica. lindmassa@yahoo.com.br

[2] Orientador/Instituto de Matemática e Estatistica, pina@mat.ufg.br