

Método do Lagrangiano Modificado para o Problema de Desigualdade Variacional

Aluno: Glaydston de Carvalho Bento

Orientador: Geci José Pereira da Silva

Instituto de Matemática e Estatística

e-mail: glaydstonc@yahoo.com.br

e-mail: geci@mat.ufg.br

Palavras-chave: Dualidade lagrangiana, dualidade variacional, método proximal interior e métodos multiplicadores.

Introdução

Dado um operador ponto conjunto qualquer T , e um subconjunto C convexo fechado de $\mathbb{R}^n$, o problema de desigualdade variacional (VI) consiste em encontrar um par $x^* \in C$ e $g^* \in T(x^*)$ tal que

$$\langle x - x^*, g^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C, \quad (VI)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Neste trabalho apresentamos resultados teóricos para resolver (VI), no caso em que o operador ponto conjunto é monótono maximal e o conjunto de restrições é um conjunto de desigualdades convexas. Em particular, é dado um esquema de dualidade Lagrangiana, a partir do qual obtemos três formulações equivalentes para o problema (VI). Além disso, usando uma regularização do tipo log-quadrática proposta por Auslender, Teboulle e Ben-Tiba em [2,3], apresentamos uma nova classe de métodos multiplicadores ponto interior para resolver o problema primal de desigualdade variacional, o dual e o primal-dual.

Resultados e Discussões

Apresentamos um esquema de dualidade Lagrangiana, através da qual é garantida a existência de essencialmente três representações equivalentes para o problema (VI). Mais precisamente,

Teorema 0.1. (*Auslender-Teboulle*) Suponha que ocorre a condição Slater para o conjunto restrição C e que $\bigcap \text{dom } f_i$ é um conjunto aberto. Então, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ resolve (VI) se, e somente se, existe $\bar{u} \in \mathbb{R}_+^m$ tal que $(\bar{x}, \bar{u})$ resolve o seguinte problema:

$$(PDVI) \quad (0, 0) \in S(\bar{x}, \bar{u}),$$

onde o operador S é definido sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ por

$$S(x, u) = \begin{cases} \{\mathbf{T}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{u}_i \partial \mathbf{f}_i(\mathbf{x})\} \times \{-\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}_{\mathbb{R}_+^m}(\mathbf{u})\}, \\ \text{se } (x, u) \in \text{dom } S = (\text{dom } \mathbf{T} \cap (\bigcap_{i=1}^m \text{dom } \mathbf{f}_i) \times \mathbb{R}_+^m \\ \emptyset, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

A partir de então apresentamos algoritmos do tipo ponto interior introduzidos por Auslender, Teboulle e Bem-Tiba, os quais são baseados na teoria LQP desenvolvida em [2] pelos mesmos, os quais convergem sob hipóteses mínimas.

Referências

- [1] Auslender, A., Teboulle, M., *Lagrangian Duality and Related Multiplier Methods for Variational Inequality Problems.*, SIAM J. Optim., 10, pp.1097-1115(2000).
- [2] Auslender, A., Teboulle, M., and Ben-Tiba, S., *A Logarithmic-Quadratic Proximal Method for Variational Inequalities.*, Comput. Optim. Appl., 12, pp.31-40(1998).
- [3] Auslender, A., Teboulle, M., and Ben-Tiba, S., *Interior Proximal and Multiplier Methods Based On Second Order Homogeneous Kernels.*, Mat. Oper. Res., 24, pp.645-668(1999).
- [4] Burchik, R. S., *Generalized Proximal Point Methods for the Variational Inequality Problem.*, Informes de Matemática, Série F-80-IMPA, pp.1-159(1995).
- [5] Burchik, R. S., Iusem, A. N., *A Generalized Proximal Point Algorithm for the Variational Inequality Problem in a Hilbert Space.*, Siam J. Optim., 8, pp.197-216(1998).

Projeto financiado pela Capes.