Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante folhedas por esferas

Aluno: Kênia Calaça das Dores

Orientador: Walterson Fereira Ferreira

Instituto de Matemática e Estatística

e-mail: keniacd@bol.com.br

e-mail: walter@mat.ufg.br

Palavras-chave: Método da Reflexão de Alexandrov- Curvatura Média Constante

Introdução

Este trabalho destina-se ao estudo de hipersuperfícies de curvatura média constante folheadas por hiperesferas, em dois espaços ambientes, no espaço Euclidiano e no espaço Hiperbólico.

Resultados e Discursões

Nistche em [5] provou que se uma superfície em $\mathbb{R}^3$ H-cmc é folheada por círculos, então os planos contendo estes círculos são paralelos. Além disso, ele mostrou que a superfície é de rotação, isto é, uma das superfícies descritas por Delaunay. Para dimensões arbitrárias, Jagy estudou em [8] as hipersuperfícies mínimas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, folheadas por hiperesferas. Ele mostrou que os hiperplanos contendo estas hiperesferas são paralelos e que a hipersuperfície é de revolução (rotacionalmente simétrica em relação a um eixo) e em [9] Jagy estudou hipersuperfícies H-cmc folheadas por esferas em três espaços ambiente diferentes, no espaço Euclidiano, no espaço Hiperbólico e na esfera. López em [4] também faz um estudo das hipersuperfícies H-cmc folheadas por hiperesferas, em três espaços ambientes, no espaço Euclidiano, no espaço Hiperbólico e no espaço de Lorentz-Minkowski, apresentando alguns resultados já obtidos por Jagy mas com demonstrações diferentes.

Em 1956, M. Shiffman estudou as superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ cujo bordo consiste da união de curvas de Jordan contidas em planos paralelos. Mais tarde, Schoen em [6] mostrou este resultado para dimensões arbitrárias. López em [3] mostrou um resultado análogo ao de

Shiffmam para superfícies H-cmc em $\mathbb{R}^3$e nos mostramos uma generalização para o resultado da Rafael.

Teorema 0.1. *Suponhamos que* $B = B_1 \cup B_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, onde cada* B_i *é uma variedade diferenciável conexa,* $n-1$ *dimensional, e está contida em um hiperplano* Π_i *e tal que* Π_1 *e* Π_2 *são paralelos e, além disso, que* B *é invariante por reflexões através de um hiperplano* P *ortogonal a* Π_i*,* $i = 1, 2$*. Suponhamos também, que cada parte de* B_i *determinada por* P *é um gráfico sobre* P*. Então toda hipersuperfície compacta de curvatura média constante mergulhada com bordo* B *inteiramente contida na faixa determinada pelos hiperplanos* Π_1 *e* Π_2 *é invariante por reflexão através do hiperplano* P*.*

Mostramos em nosso trabalho que hipersuperfícies $H-cmc$ $(H \neq 0)$ folheadas por esferas, em duas situações diferentes, são hipersuperfícies de revolução.

Teorema 0.2. *Seja* M^n*,* $n \geq 2$*, uma hipersuperfície de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, orientável e orientada, de curvatura média constante* H*, não nula, e folheada por esferas em hiperplanos paralelos. Então* M^n *é uma hipersuperfície de revolução.*

Teorema 0.3. *Seja* M *uma hipersuperfície, orientável e orientada, em* $\mathbb{H}^{n+1}$ *de curvatura média constante e folheada por esferas em horoesferas paralelas. Então* M *é uma hipersuperfície de revolução, isto é, existe uma geodésica* α *tal que* M *é invariante por um grupo de isometrias de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *que deixa* α *fixa.*

Mostramos como são as hipersuperfícies M do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ de curvatura média constante, não nula, folheadas por esferas em hiperplanos geodésicos paralelos.

Teorema 0.4. *Seja* M^n *uma hipersuperfície, orientável e orientada, em* $\mathbb{H}^{n+1}$ *de curvatura média constante, não nula, e folheada por esferas em hiperplanos geodésicos paralelos. Se existem dois hiperplanos geodésicos* P_1 *e* P_2 *da folheação de* M *tais que* $(M \cap P_1) \cup (M \cap P_2)$ *é invariante por reflexões hiperbólicas através de* $(n-1)$ *hiperplanos geodésicos ortogonais entre si e ortogonais a* $P_1 \cup P_2$*, então* M *é uma hipersuperfície umbílica.*

Os dois primeiros resultados foram apresentados por Jagy em [9] e em [4] López apresentou outras demonstrações para estes resultados. As demostrações que apresentamos é devido a López [4].

Conclusão

Obtemos que hipersuperfícies $H - cmc(H \neq 0)$ folheadas por esferas, em dois espaços ambientes, são de revolução e que em alguns casos é possível obter respostas sobre a geometria de uma hipersuperfície a partir da geometria do seu bordo.

Referências

[1] Alexandrov, A. D, *Uniqueness theorems for surfaces in the large V*, Vestnik Leningrad Univ.13(1958)(19)5-8; Amer. Math. Soc. Trans.(2)21, 412-416, 1962.

[2] Chavel, Isaac *Riemannian Geometry: A modern introduction*, Cambridge(Cambridge tracts in mathematics 108), 1996.

[3] López, Rafael *Surfaces of Constant Mean Curvature Bounded by Two planar Curves.* Ann. Glo. Anal. and Geo. 15, 201-210, 1997.

[4] López, Rafael, *Constant Mean Curvature Hypersurfaces Foliated by Spheres.* Diff. Geom. and Aplic. 11, 245-356, 1999.

[5] Nistche, Johannes. C. C., *Cyclic surfaces of constant mean curvature*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. II, Minneaopolis, 1-5, 1989.

[6] Schoen, Richard M. *Uniqueness, symetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differential Geom.18, 791-809, 1983.

[7] Spivak, Michael, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 2nd Ed., vol.I e IV, Publish or Perish, Berkeley, CA, 1979.

[8] W., Jagy, *Minimal hypersurfaces foliated by spheres*, Michigan Math. J. 38, 255-270, 1991.

[9] W., Jagy, *Sphere-Foliated constant mean curvature submanifolds*, Rocky Mountain Jornal of Mathemathics. volume 28, 983-1015, 1998.

Projeto financiado pela Capes.