Convexidade e Algumas Generalizações (continuação)

Autores:

Karise Gonçalves Oliveira email:karise_mat@yahoo.com.br

Luis Román Lucambio Pérez email:lrlp@mat.ufg.br

Unidade:

Instituto de Matemática e Estatística IME-UFG

Resumo

Iniciamos os estudos com uma breve discussão a cerca dos Multiplicadores de Lagrange, pois estes foram de suma importância nos resultados de programação matemática mais recentes. Em seguida, começamos a estudar resultados clássicos da programação não-linear, tais como as condições de Karush Kuhn Tucker (KKT), pois estes formam uma base para o desenvolvimento de muitos algoritmos, sempre relacionando com a primeira parte o projeto, isto é, recorrendo aos resultados provados anteriormente para conjuntos e funções convexas, assim como para suas generalizações. Passanso então, ao estudo da função Lagrangeana e suas implicações na teoria da dualidade, das propriedades de algoritmos e de convergência e o estudo de alguns métodos de ascendência.

Palavras-chave:

convexidade, otimização, algoritmos, programação não linear.

Introdução

Os resultados mais importantes na programação não linear são as condições de KKT. Elas formam a base para o desenvolvimento de muitos algoritmos computacionais. O critério para se reconhecer o ponto ótimo local restrito são diretamente derivados dessas condições. A função Lagrangeana, mostra sua importância pois tem implicações na teoria da dualidade. E o teorema da convergência global é bastante geral e usado para provar a convergência de muitos algoritmos.

Metodologia

Inicialmente aprofundamos nossos estudos a cerca dos Multiplicadores de Lagrange, utilizando principalmente [B] e [MS], e nos estudos seguintes, com relação a KKT, utilizamos [A], [P] e [S]. A evolução da orientanda no projeto foi avaliada semanalmente pelo orientador através de exposições, ocasiões nas quais, foram retiradas dúvidas a respeito dos tópicos em estudo e também se discutiu a melhor maneira de se proceder em etapas subseqüentes.

Resultados e Discussão

Resultados recentes em programação matemática são extensão direta ou generalizações dos multiplicadores de Lagrange, principalmente em problemas com desigualdades restritivas.

Teorema 1. *Sejam f e g_i $i = 1, ..., m$ funções com domínio $D \subseteq \mathbb{R}^m$, contínuas e diferenciáveis numa vizinhança $V_e(x^*) \subset D$. Seja x^* mínimo local de f em todos pontos x pertencentes a $V_e(x^*)$ e que satisfaz $g_i(x) = 0$ $i = 1, ..., m$ e assumindo que a matriz Jacobiano de $g_i(x^*)$ tem grau m. Nestas condições o gradiente de f em x^* é combinação linear dos gradientes de g_i em x^*, isto é, existe $\lambda_i * \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i * \nabla g_i(x^*).$$

Condições necessárias de KKT Os resultados mais importantes na programação não linear são as condições de KKT. Elas formam base para o desenvolvimento de muitos algoritmos computacionais. O critério para se reconhecer o ponto ótimo local restrito são diretamente derivados dessas condições.

Os cones ajudam no entendimento das condições de KKT. Seja o conjunto de pontos

$$R = \{X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \lambda_i \geq 0 i = 1, ..., m\},$$

onde x_i $i = 1, ..., m$ são os geradores do cone.

Interpretação geométrica das condições de KKT As condições de KKT mostram que em um ponto ótimo restrito, nenhuma mudança pequena nas variáveis do problema pode melhorar a função objetivo.

Exemplo 1. *max* $f(x, y) = -[(x-2)^2 + (y-1)^2]$
s. a $g_1(x, y) = y - x^2 \geq 0$
$g_2(x, y) = -y - x + 2 \geq 0.$
O ponto ótimo ocorre na interseção das duas restrições, no ponto (1,1).

Métodos básicos de ascendência Todos algoritmos de ascendência possuem uma estrutura comum. Partindo de um ponto inicial, determina-se, através de uma certa regra, uma direção de pesquisa; em seguida move-se nesta direção a um máximo relativo da função objetiva nesta linha. A diferença entre os algoritmos é a regra através da qual se definem as direções de pesquisa.

∘ Método Gradiente

O Método é importante pois é um dos mais simples para o qual existe uma análise satisfatória. Seja f uma função contínua, com derivados parciais contínuos de primeira ordem em E^n. Denotemos $\nabla f(x)$ por $g(x)$, ou simplesmente g quando não houver ambiguidade. Logo o método é definido por

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k g_k,$$

∘ Método de Newton

O método de Newton estende a idéia do método gradiente aproveitando aproximações quadráticas a f, pois além de serem melhores que aproximações lineares, ganham importância à medida que se aproximam do ponto de solução x^*. Perto do ponto x_k pode-se aproximar f pela expansão de Taylor dada por

$$f_Q(x) \cong f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)' H(x_k)(x - x_k)$$

onde $H(x_k)$ é a matriz Hessiana dos segundos derivados parciais no ponto x_k. Vemos que termos de segunda ordem dominam perto do máximo, pois $\nabla f(x^*) = 0$, logo $\nabla f(xk)$ próximo de zero próximo do máximo. Assim perto do ponto ótimo aproximações lineares são instáveis.

Conclusão

O estudo dos multiplicadores de Lagrange e das condições de KKT para resolver problemas de PNL, é importante pois formam base para o desenvolvimento de muitos algoritmos computacionais. Primeiramente foram estudados conceitos e propriedades do gradiente de funções seguindo então para o desenvolvimento das condições de KKT, sempre na busca de exemplos e relacionando com a convexidade, em seguida vendo a análise de algoritmos desenvolvidos para resolver problemas de PNL e a importância do teorema da convergência global. Vendo finalmente técnicas básicas para a solução de problemas de maximização irrestrita.

Bibliografia

[A] Avriel, Morecai; *Nonlinear Programming - Analysis e Methods*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.

[B] Boyd, Stephen; Vandenberghe, Lieven; *Convex Optimization*, Lectures notes, http://www.stanford.edu/class/ee364/#lectures.

[F] Fritzsche, Helmut; *Programação Não-Linear: Análise e Métodos*, São Paulo:Edgard Blucher: Ed da USP, 1978.

[MS] Martinez, José Mário; Santos, Sandra Augusta; *20º Colóquio Brasileiro de Matemática - Métodos Computacionais de Otimização*, IMPA, 24-28 Julho, 1995.

[P] Polyak, Boris T.; *Introduction to Optimization*, Optimization Software, Inc. Publications Division, New York, 1987.

[S] Sundaram, Rangarajan K.; *A First Course in Optimization Theory*, Cambridge University Press, 1999.

Agencia Financiadora:

CNPq.