Título: Métodos de Otimização Restritos
Autor: Kelvin Rodrigues Couto
e-mail: kelvimrodrigues@hotmail.com
Unidade Acadêmica: Instituto de Matemática e Estatística
Palavras-chave: Barreira, Penalidades, Barreira, Projetado

Introdução

O problema de otimização é o seguinte:

$$\min_{x\in\Omega} f(x)$$

onde f é uma função real e o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é definido, freqüentemente, por um conjunto de igualdades e desigualdades chamado conjunto factível, ou conjunto viável.

Metodologia

A metodologia adotada foi a seguinte:
i) Levantamento bibliográfico sobre o assunto;
ii) Reuniões semanais e seminários;
iii) Investigação dos conceitos básicos da análise convexa, álgebra linear e análise numérica.

Resultados e Discussão

Considerando o problema

$$\min_{x\in\Omega} f(x) \tag{1}$$

Podemos caracterizar sua solução como sendo local ou global e ainda estrito ou não.

Vamos especificar o problema dado por (1) como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito à} & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array} \tag{2}$$

onde $f, h, g \in \mathbf{C}^2$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com $m < n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$; ou seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \ h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0\}$.

O Método de Penalidades, é um procedimento que visa aproximar problemas de otimização com restrições, por problemas de otimização irrestritos. Essa aproximação é obtida, adicionando-se à função objetiva uma parcela que estabelece uma grande penalidade pela violação das restrições.O seguinte teorema garante a convergência global do Método.

Teorema 1. *Seja $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência gerada pelo método das penalidades. Então todo ponto limite dessa seqüência será uma solução do problema* (2)*.*

O método de direções factíveis trabalham com a formulação primal do problema. Nos métodos primais os algoritmos geram seqüências de pontos factíveis e quando são interrompidos fornecem soluções sub-ótimas. As desvantagens são na obtenção de pontos iniciais factíveis, que pode ser dificultada pela eventual complexidade das restrições, além disso, nesses métodos temos a necessidade de manter a factibilidade ao longo do processo e direções factíveis podem não existir. Em resumo, porém, os métodos de direções factíveis são de importância entre os algoritmos de programação não-linear, devido a sua aplicabilidade geral, simplicidade e boas propriedades de convergência, sobretudo de restrições lineares.

A idéia dos métodos de direções factíveis é iterar, através da região Ω da seguinte maneira:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

onde d_k é um vetor de direções e α_k é um escalar não negativo. O escalar α_k é selecionado, tal que f seja mínima na direção d_k e, além disso, todo o segmento de linha entre x_k e x_{k+1} esteja dentro de Ω, ou seja d_k é uma direção viável.

O Método do Gradiente projetado é motivado por métodos de descida para problemas irrestritos. O gradiente negativo é projetado no espaço tangente às restrições ativas em um ponto factível inicial x^k e através desta projeção conseguimos um novo ponto $x^k + 1$ tal que $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, seguindo este processo esta seqüência de pontos converge para solução do nosso problema.

Assim como os Métodos de Penalidade a idéia principal dos Métodos Barreira é a aproximação de problemas de otimização com restrições, por problemas de otimização sem restrições. Uma característica importante dos Métodos Barreira é que, diferentemente dos Métodos de Penalidade, podem ser utilizados somente para resolução de problemas com restrições de desigualdade, mas a diferença essencial é que nos Métodos de Penalidade as aproximações sucessivas da solução não são factíveis, enquanto que nos Métodos Barreira elas são sempre factíveis. Por isso os Métodos Barreira também são chamados de Métodos de pontos interiores.

Conclusões

1. Através do estudo das condições de otimalidade podemos dizer se um dado ponto é ou não solução de nosso problema.
2. Podemos desenvolver métodos para resolução de nosso problema, que seguem caminhos diferentes; seja abordando a análise primal do problema, seja, pela aproximação de nosso problema restrito por problemas irrestritos.
3. A implementação dos Métodos é importante pois, foi possível verificar, na prática, a convergência dos métodos implementados.

Referências Bibliográficas

1. Luenberger, D. G. *Linear and nonlinear programming.* Addison-Wesley Publishing Company, Nova York, 1986.
2. Friedlander, Ana. *Elementos de Programação Não-Linear.* Editora da Unicamp, São Paulo, 1994.
3. Fritzsche, Helmut. *Programação Não-Linear Análise e Métodos.* Editora da Universidade de São Paulo, 1978.
4. Bazaraa, M.S., Sherali, H. D and Shetty, C. M. *Nonlinear Programing: Theory and Algorithms.* John Wiley and Sons, 1979.
5. Tiel, J. V. *Convex Analysis: An Introductory Text.* John Wiley and Sons, 1984.
6. Mahey, Philippe. *Programação Não-Linear Introdução à Teoria e aos Métodos.* Editora Campus, 1987

Fonte de financiamento: CNPQ