**Título:** Campos Vetoriais Lineares por Partes no Plano $\mathbb{R}^2$
**Bolsista:** Lima, B.B.S. bbslima@yahoo.com.br
**Orientador:** Garcia, R.A. ragarcia@mat.ufg.br
**Unidade Acadêmica:** Instituto de Matemática e Estatística
**Palavras-chave:** campo vetorial, retrato de fase, singularidade, órbita periódica

## Introdução

Esse projeto trata da teoria qualitativa das equações diferenciais no plano. Em especial os campos parcialmente lineares no plano $\mathbb{R}^2$, que foram introduzidos em 1991 por L. Chua e R. Lum, onde algumas propriedades de estabilidade e generecidade foram estudadas. Temos como objetivo descrever qualitativamente os campos lineares e parcialmente lineares no plano $\mathbb{R}^2$, seus retratos de fase, órbitas periódicas, bifurcações... especialmente aqueles definidos por duas retas paralelas que dividem o plano em três regiões não compactas.

## Material e Método

Ocorreram encontros semanais entre o orientador e o bolsista. Nos quais o bolsista tirou suas dúvidas e apresentou seminários. Foram feitas muitas simulações em computador usando o software Maple V. E ainda, o bolsista cursou como aluno especial a disciplina do mestrado Equações Diferenciais Ordinárias e participou do programa de verão do IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) , cursando a disciplina Introdução à Modelagem Computacional.

## Resultados e Discussão

Os matemáticos L.Chua e R.Lum em 1991 estudaram propriedades de campos vetoriais no plano $\mathbb{R}^2$ definidos por $X = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$ cujas componentes são dadas por

$$P = a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^{n} c_1^i \left|x - \gamma_i\right| + \sum_{j=1}^{m} d_1^j \left|y - \delta_j\right|;$$
$$Q = a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^{n} c_2^i \left|x - \gamma_i\right| + \sum_{j=1}^{m} d_2^j \left|y - \delta_j\right|. \qquad (1)$$

Onde $\Gamma = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n\}$ e $\Delta = \{\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n\}$ são sequências de números reais. Assim como os parâmetros $a, b, c, d$. Logo o campo $X$ pode ser considerado como um elemento do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{6+2(n+m)}$ considerado com a métrica e topologia usual.

Denotando $\Gamma_i = [\gamma_i, \gamma_{i+1}]$, $i = 1, ..., n-1$, $\Gamma_0 = (-\infty, \gamma_1]$ e $\Gamma_n = [\gamma_n, \infty)$ e o mesmo para $\Delta_i$. Observamos que $X$ é linear por partes no seguinte sentido: restrito a cada uma das $(n+1) \times (m+1)$ células $\Gamma_i \times \Delta_j$ da rede $(\Gamma, \Delta)$ ele é um campo linear não homogêneo.

Temos maior interesse no caso n=2, m=0, ou seja, campos do tipo:

$$\begin{aligned} P &= a_1 + b_{11}x + b_{12}y + c_1^1 |x - \gamma_1| + c_2^1 |x - \gamma_2| ; \\ Q &= a_2 + b_{21}x + b_{22}y + c_2^1 |x - \gamma_1| + c_2^2 |x - \gamma_2| . \end{aligned} \tag{2}$$

Muitas propriedades dos campos acima foram estudadas, vou mostrar uma delas que essencialmente é um problema proposto na referência (2). Temos um campo do tipo (Lienard):

$$P = y - f(x) \qquad Q = -x$$

com $f(x) = 2x + \frac{3}{2}|x-1| - \frac{3}{2}|x+1|$.

Fato: O campo acima admite uma única órbita periódica. A demonstração é bem construtiva e utiliza-se da simetria do campo e de idéias básicas da Transformação de Poincaré.

Outro fato importante, foi provado na referência (3). A existência de uma classe aberta e densa de campos do tipo (2)

## Conclusões

1. Através de propriedades dos campos lineares, podemos determinar propriedades dos campos do tipo (2).

2. Podemos estudar propriedades do campo (1), em especial aqueles definidos por malha formada por duas retas paralelas sem resolvermos explicitamente suas equações;

3. Construímos exemplos de campos parcialmente lineares com 2 tipos de órbitas periódicas, uma "herdada" do caso linear e outra que dependeu fortemente da não linearidade do problema;

4. Descrevemos uma classe aberta e densa de campos do tipo (1)

## Referências Bibliográficas


(1) R. Garcia, J. Sotomayor, *Structural Stability of piecewise-linear vector fields*, Journal of Differential Equations 192(2003) 553-565.

(2) M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney *Differential Equations, Dynamical Systems, and Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press,$2^{nd}$ Edition, 2004.

(3) J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA 1979;



Fonte de Financiamento: CNPq